

VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS

Evaldas ZDANCEVIČIUS

DALELIŲ KONTAKTO KLAMPIATAMPRAUS SLOPINIMO MODELIŲ TYRIMAS

DAKTARO DISERTACIJA

TECHNOLOGIJOS MOKSLAI,
MECHANIKOS INŽINERIJA (09T)



LEIDYKLA
Vilnius TECHNIKA 2016

Disertacija rengta 2012–2016 metais Vilniaus Gedimino technikos universitete.

Moksliniai vadovai

dr. Darius ZABULIONIS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, mechanikos inžinerija – 09T) (2014–2016),

dr. Darius MARKAUSKAS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, mechanikos inžinerija – 09T) (2012–2014).

Vilniaus Gedimino technikos universiteto Mechanikos inžinerijos mokslo krypties disertacijos gynimo taryba:

Pirmininkas

prof. dr. Vytautas TURLA (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, mechanikos inžinerija – 09T).

Nariai:

prof. habil. dr. Rimantas BARAUSKAS (Kauno technologijos universitetas, mechanikos inžinerija – 09T),

doc. dr. Artūras KILIKEVIČIUS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, mechanikos inžinerija – 09T),

prof. habil. dr. Genadijus KULVIETIS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, mechanikos inžinerija – 09T),

prof. habil. dr. Marek MOLENDĄ (Lenkijos mokslų akademijos agrofizikos institutas, mechanikos inžinerija – 09T).

Disertacija bus ginama viešame Mechanikos inžinerijos mokslo krypties disertacijos gynimo tarybos posėdyje **2017 m. sausio 13 d. 9 val.** Vilniaus Gedimino technikos universiteto Senato posėdžių salėje.

Adresas: Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva.

Tel.: (8 5) 274 4956; faksas (8 5) 270 0112; el. paštas doktor@vgtu.lt

Pranešimai apie numatomą ginti disertaciją išsiųsti 2016 m. gruodžio 12 d. Disertaciją galima peržiūrėti VGTU talpykloje <http://dspace.vgtu.lt> ir Vilniaus Gedimino technikos universiteto bibliotekoje (Saulėtekio al. 14, LT-10233 Vilnius, Lietuva)

VGTU leidyklos TECHNIKA 2398-M mokslo literatūros knyga
ISBN 978-609-457-977-6

© VGTU leidykla TECHNIKA, 2016

© Evaldas, Zdancevičius, 2016

evaldas.zdancevicius@vgtu.lt

VILNIUS GEDIMINAS TECHNICAL UNIVERSITY

Evaldas ZDANCEVIČIUS

INVESTIGATION OF VISCOELASTIC DAMPING MODELS OF PARTICLES CONTACT

DOCTORAL DISSERTATION

TECHNOLOGICAL SCIENCES,
MECHANICAL ENGINEERING (09T)



Vilnius LEIDYKLA TECHNICA 2016

Doctoral dissertation was prepared at Vilnius Gediminas Technical University in 2012–2016.

Scientific Supervisors

Dr Darius ZABULIONIS (Vilnius Gediminas Technical University, Mechanical Engineering – 09T) (2014–2016),

Dr Darius MARKAUSKAS (Vilnius Gediminas Technical University, Mechanical Engineering – 09T) (2012–2014).

The Dissertation Defence Council of Scientific Field of Mechanical Engineering of Vilnius Gediminas Technical University:

Chairman

Prof. Dr Vytautas TURLA (Vilnius Gediminas Technical University, Mechanical Engineering – 09T).

Members:

Prof. Dr Habil. Rimantas BARAUSKAS (Kaunas University of Technology, Mechanical Engineering – 09T),

Assoc. Prof. Dr Artūras KILIKEVIČIUS (Vilnius Gediminas Technical University, Mechanical Engineering – 09T),

Prof. Dr Habil. Genadijus KULVIETIS (Vilnius Gediminas Technical University, Mechanical Engineering – 09T),

Prof. Dr Habil. Marek MOLENDĄ (Institute of Agrophysics of Polish Academy of Sciences, Mechanical Engineering – 09T).

The dissertation will be defended at the public meeting of the Dissertation Defence Council of Mechanical Engineering in the Senate Hall of Vilnius Gediminas Technical University at **9 a. m. on 13 January 2017**.

Address: Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lithuania.

Tel.: +370 5 274 4956; fax +370 5 270 0112; e-mail: doktor@vgtu.lt

A notification on the intend defending of the dissertation was send on 12 December 2016.

A copy of the doctoral dissertation is available for review at the VGTU repository <http://dspace.vgtu.lt> and at the Library of Vilnius Gediminas Technical University (Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lithuania).

Reziumė

Disertacijoje nagrinėjami klampiatampraus slopinimo modeliai, naudojami diskrečiųjų elementų metode. Tikslus energijos sklaidos modeliavimas yra svarbus dalelių dinaminių sistemų skaičiavimuose, o tai pasiekti galima tik tinkamai įvertinus esamą slopinimo jėgos modeliavimo metodiką. Disertacijoje pateiktos rekomendacijos ir sukurti nauji metodai leidžia atsižvelgti į įvairius veiksnius įtakančius dalelių kontaktą ir sumažinti atsirandančias paklaidas. Tyrimo tikslas – ištirti esamus klampiatampraus slopinimo modelius ir sukurti diskrečiųjų elementų metodui tinkamą normalinio kontakto slopinimo modelį.

Disertaciją sudaro įvadas, trys pagrindiniai skyriai, išvados, naudotos literatūros ir mokslinių publikacijų disertacijos tema sąrašai ir du priedai. Įvade aprašyta darbo aktualumas, tikslas, metodika, tyrimų uždaviniai, mokslinis naujumas ir praktinė reikšmė.

Pirmasis skyrius yra apžvalginio pobūdžio. Jame nagrinėjama diskrečiųjų elementų metodika, dalelių kontakto modeliavimo ypatumai ir taikomi klampiatampraus slopinimo modeliai. Skyriaus pabaigoje formuluojamos išvados ir tikslinami disertacijos uždaviniai.

Antrajame skyriuje taikant nedimensinę analizę sukurtas apibendrintas klampiatampraus slopinimo modelis. Taikant minėtą modelį ištirti literatūroje pateikiami populiariausi klampiatampraus slopinimo modeliai. Tyrimai atlikti nagrinėjant dviejų dalelių kontakto ir dalelių grandinės modeliavimo atvejus, o gautieji modeliavimo rezultatai palyginti su eksperimentiniais rezultatais. Sudarytos slopinimo modelių naudojimo rekomendacijos įvairiais birių medžiagų skaičiavimo atvejais.

Trečiajame skyriuje pateikta sukurta apibendrinta slopinimo modelio metodika, leidžianti įvertinti restitucijos koeficiento priklausomybę nuo pradinio kontakto greičio. Sukurtos metodikos efektyvumas pailiustruotas keleto medžiagų dalelių kontakto modeliavimo rezultatus lyginant su eksperimentiniais duomenimis.

Disertacijos tema paskelbti 3 straipsniai: du – žurnaluose esančiuose „ISI Web of Science“ duomenų bazėje ir vienas – tarptautinėje duomenų bazėje esančiame žurnale. Disertacijos tema perskaityti 9 pranešimai Lietuvos bei kitų šalių konferencijose.

Abstract

In the present thesis the viscoelastic damping models used in the discrete element method are examined. The aim of the research is to investigate already existing viscoelastic damping models, to analyze their parameters and to create the new viscoelastic damping methodology suitable for the normal contact of the particles.

The thesis consists of the introduction, three chapters, the general conclusions, the lists of the references and publications. In the introduction, the problem of the investigation, the research aim, the used methods, the novelty as well as the practical significance and defended statements are presented. At the end of the introduction, the structure of the thesis, the approbation of the results in conferences and publications list is provided.

Chapter 1 is dedicated to presenting the conception of the discrete element method, to collect and summarize the information on the already existing viscoelastic damping models. At the end of the chapter, the aims of the thesis are specified and the conclusions are formulated.

In Chapter 2 the nondimensional analysis is applied to create new generalized viscoelastic damping method. A numerical examination and assessment of the already existing viscoelastic damping models is conducted by modeling the contact of two particles and behavior of the chains of the particles. The numerical results of the theoretical calculations are compared with the known experimental data provided in the literature. The recommendations on the applicability of the most popular already existing damping models in the discrete element method are formed.

In Chapter 3 the new methodology of the viscoelastic damping of the normal contact is created. The created methodology takes into account the dependence of the coefficient of restitution on the initial contact velocity. The effectiveness of the new methodology is illustrated by calculations of the coefficients of restitution of the normal contact of two particles of several kind of material. The calculated results are compared with the experimental data provided in the literature.

3 articles focusing on the subject of the discussed dissertation are published: two articles in “ISI Web of Science“ database and one article – in other database journal. 9 presentations on the subject have been given in conferences at national and international level.

Žymenys

Žymenys lotyniškais raidėmis

$C(\cdot)$ – slopinimo funkcija;

C_{mod} – modifikuota slopinimo funkcija;

c – nedimensinis slopinimo koeficientas;

E – tamprumo modulis;

$E_{ff,ij}$ – efektyvusis i ir j dalelių tamprumo modulis;

E_{in} – pradinė kinetinė energija;

E_r – likutinė kinetinė energija;

E_d – išsklaidyta kinetinė energija;

e – restitucijos koeficientas;

\mathbf{F}, F – kontakto jėgos vektorius ir kontakto jėga (skaliamas), atitinkamai;

$\mathbf{F}_n, \mathbf{F}_{n,ij}, F_n$ – normalinio kontakto jėgos, i ir j dalelių normalinio kontakto jėgos vektorius ir normalinė kontakto jėga (\mathbf{F}_n arba $\mathbf{F}_{n,ij}$ Euklidinė norma, skaliamas), atitinkamai;

\mathbf{F}_t – tangentinės kontakto jėgos vektorius;

$\mathbf{F}_{n,el,ij}, F_{n,el,ij}$ – tamprią deformaciją atitinkančios normalinės jėgos vektorius ir jo Euklidinė norma;

$\mathbf{F}_{n,d,ij}, F_{n,d,ij}$ – slopinimo normalinės jėgos vektorius ir jo Euklidinė norma;

F_d – normalinio kontakto jėga susijusi su slopinimu;

F_{el} – normalinio kontakto jėga susijusi su tampria sąveika;

\mathbf{g} – laisvojo kritimo pagreičio vektorius;

G_i, G_j – i ir j dalelių šlyties moduliai;

H – didžiausias kontaktuojančių kūnų persidengimas pagal Herco sprendinį;

h, \bar{h} – dimensinis ir nedimensinis persidengimas;

i ir j – dalelių indeksai;

$K_n, K_{n,ij}$ – standumo koeficientas ir i ir j dalelių standumo koeficientas;

m, m_i, m_j – masė, i dalelės masė, j dalelės masė;

m_{eff} – efektyvioji masė;

N – dalelių skaičius;

$\mathbf{n}, \mathbf{n}_{ij}$ – normalinio kontakto ir i ir j dalelės normalinio kontakto vienetiniai vektoriai atitinkamai;

R, R_i, R_j – dalelės spindulys, i ir j dalelių spinduliai atitinkamai;

$R_{eff,ij}$ – efektyvusis i ir j dalelių spindulys;

\mathbf{t} – tangentinio kontakto vienetinis vektorius;

t – laikas;

ΔT ir $\Delta \bar{T}$ – dimensinė ir nedimensinė kontakto trukmės;

ΔT_{app} ir $\Delta \bar{T}_{app}$ – dimensinė ir nedimensinė laiko trukmės nuo kontakto pradžios iki didžiausios kontakto jėgos;

t, \bar{t} – laikas ir nedimensinis laikas;

t_0, t_p – kontakto pradžia ir kontakto pabaiga;

t_b, t_g – dalelių grandinės modeliavimo pradžios ir pabaigos laikas;

v – dalelės judėjimo greitis;

v_0 – parametras taikomas nedimensiniui c koeficientui ir dimensinei γ slopinimo konstantai, bei slopinimą apibūdinančiai funkcijai C nustatyti. Bendruoju atveju v_0 netaikomas kaip pradinė sąlyga dalelių sistemų modeliavimui, nors gali būti, kad $v_0 = w_0$;

w_0 – pradinis kontakto greitis atitinkantis pradines sąlygas taikomas modeliuojant dalelių kontaktą, tačiau w_0 netaikomas c, γ ir $C(h)$ apskaičiavimui.

Žymenys graikiškomis raidėmis

α, β – tamprią ir klampią sąveiką atitinkančių jėgų laipsniai;

μ_i, μ_j – i ir j dalelių Puasono koeficientai;

ρ – tankis;

$\psi(w_0), \tilde{\psi}(w_0)$ – normalinės sąveikos modifikuoto LS modelio, t. y. FLS , funkcija ir jos aproksimacija.

Matematiniai simboliai ir žymenys

$:=$ – lygu pagal apibrėžimą;

\equiv – tapatu;

\approx – apytikslės lygybės ženklas;

\neq – nelygu;
 \rightarrow – žymi artėjimą;
 $\{\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \dots\}$ – aibė sudaryta iš skliaustuose išvardintų elementų;
 $\{\cdot : \cdot\}$ – aibė sudaryta iš elementų atitinkančių po dvitaškio užrašytą sąlygą;
 $[\cdot, \cdot]$ – uždaras intervalas (uždara aibė);
 $]\cdot, \cdot[$ – atviras intervalas (atvira aibė);
 (\cdot) – vektorius;
 \in – elemento priklausymo aibei žymuo;
 \subset arba \supset – aibės poaibio žymuo;
 \setminus – aibių skirtumo žymuo;
 $\max\{\cdot\}$, $\min\{\cdot\}$ – maksimalus ir minimalus $\{\cdot\}$ aibės elementas;
 $\text{sign}(\cdot)$ – signum funkcija;
 $|\cdot|$ – absoliuti skaičiaus reikšmė;
 $df(t)/dt$ – funkcijos f išvestinė pagal t ;
 \times – vektorinė sandauga;
 \bullet – vektorių skaliarinė sandauga.

Šioje disertacijoje nesutvarkytos aibės žymimos didžiosiomis raidėmis, o jų elementai – mažosiomis. Nesutvarkytos aibės apibrėžiamos riestiniuose skliaustuose $\{\cdot\}$ išvardinant jos elementus arba riestiniuose skliaustuose $\{\cdot\}$ nurodant elemento žymenį ir savybę pagal kurią daiktas gali būti priskirtas tam tikrai aibei. Kai aibė apibrėžiant išvardinant jos elementus šie elementai atskiriami kableliais, t. y. $\{\cdot, \cdot, \cdot, \dots\}$. Kai aibė apibrėžiama pagal jos elementų tam tikrą savybę, aibės elementus žymintis simbolis ir savybė skiriami dvitaškiu, pavyzdžiui, $\{1, 2, 3, 4\}$ aibė gali būti apibrėžta taip $\{i: i < 10\}$. Šioje disertacijoje taip pat taikomi keletas aibių teorijos operacijų: aibių skirtumas, \setminus , priklausymo aibei simbolis \in , poaibio ženklas \subset . Uždara aibė arba uždaras intervalas žymimas $[\cdot, \cdot]$ skliaustais, o atviras intervalas – $]\cdot, \cdot[$ skliaustais. Pavyzdžiui, užrašas $x \in [a, b]$ tapatus $a \leq x \leq b$, o $x \in]a, b[$ tapatus $a < x < b$. Aibės didžiausias arba mažiausias elementas žymimas $\max\{\cdot\}$ arba $\min\{\cdot\}$, pavyzdžiui minimali funkcijos f reikšmė, kai x gali įgyti reikšmes iš X aibės rašoma $\min\{f(x): x \in X\}$.

Vektoriai žymimi nepasvirusiomis dažniausiai mažosiomis paryškintomis raidėmis, bet kartais taikomos ir didžiosios nepasvirusios paryškintos raidės. Vektorių komponentės žymimos įprastomis pasvirusiomis neparyškintomis raidėmis. Vektorius taip pat gali būti apibrėžtas jo komponentes išvardinant lenktiniuose skliaustuose (\cdot) .

Turinys

IVADAS.....	1
Problemos formulavimas.....	1
Darbo aktualumas.....	1
Tyrimų objektas.....	2
Darbo tikslas.....	2
Darbo uždaviniai	2
Tyrimų metodika	3
Darbo mokslinis naujumas	3
Darbo rezultatų praktinė reikšmė	3
Ginamieji teiginiai.....	4
Darbo rezultatų aprobavimas.....	4
Disertacijos struktūra.....	5
1. DISKREČIŲJŲ ELEMENTŲ METODO IR SLOPINIMO MODELIŲ APŽVALGA.....	7
1.1. Diskrečiųjų elementų metodo koncepcija	7
1.2. Dalelių sistemų modeliavimas	9
1.3. Diskrečiųjų elementų metodo koncepcija	10
1.4. Sąveikaujančių kūnų kinematikos vektorinė algebra	11

1.5. Dalelių normalinio kontakto jėgų modeliai	13
1.6. Tampriasis deformacijas atitinkanti jėga	14
1.7. Slopavimo jėga	15
1.8. Judėjimo lygtis	17
1.9. Esami klampiatampinės sąveikos modeliai	18
1.9.1. Tiesinės klampiatampinės sąveikos modelis	19
1.9.2. Lyo ir Hermano (Lee ir Hermann) sąveikos modelis	20
1.9.3. Tsudžio (Tsuji) sąveikos modelis	20
1.9.4. Briliantovo (Brilliantov) sąveikos modelis	20
1.9.5. Hu sąveikos modelis	21
1.10. Pirmojo skyriaus išvados ir disertacijos uždavinių formulavimas	22
 2. APIBENDRINTO SLOPIMO MODELIO KŪRIMAS IR TAIKYMAS ...	25
2.1. Nedimensinės analizės taikymas apibendrinto slopinimo modelio kūrimui	26
2.2. Slopavimo funkcijos $C(h)$ nedimensinių slopinimo koeficientų c apskaičiavimas	29
2.3. Nedimensinės kontakto jėgos analizė	31
2.4. Dviejų dalelių kontaktas	35
2.4.1. Restitucijos koeficiento priklausomybės nuo pradinio kontakto greičio įtaka klampiatampinės slopinimo modeliavimui	35
2.4.2. Kontakto jėgos, persidengimo, persidengimo greičio ir jų kitimo palyginimas	39
2.4.3. Metalinės ir guminės pusėrių eksperimentiškai nustatytų kontakto parametrų palyginimas su teoriniais skaičiavimais	42
2.5. Bangų sklaidimas dalelių grandinėje	43
2.5.1. Tyrimo objektas ir skaičiavimo duomenys	45
2.5.2. Jėgos bangos sklaidimo dalelių grandinėje modeliavimo rezultatai ir palyginimas su eksperimentu	46
2.5.3. Dalelių greičio bangos sklaidimo vienodų dalelių grandinėje modeliavimo rezultatai	48
2.5.4. Dalelių grandinės kinetinės energijos nuostolių tyrimas	55
2.6. Multisferinės dalelės kontakto parametrų palyginimas	58
2.7. Antro skyriaus išvados	61
 3. APIBENDRINTAS SLOPIMO MODELIS IR JO PARAMETRŲ APSKAIČIAVIMO METODIKA	63
3.1. Pagrindinės priklausomybės	64
3.1.1. Klampiatampinės slopinimo modelio parametrų parinkimo metodika	68

3.1.2. 3.22 lygties skaitinis sprendimas ir slopinimo modelio parametru parinkimo algoritmas	71
3.2. Naujojo modelio taikymas	73
3.3. Trečio skyriaus išvados	81
BENDROSIOS IŠVADOS	83
LITERATŪRA IR ŠALTINIAI	85
AUTORIAUS MOKSLINIŲ PUBLIKACIJŲ DISERTACIJOS TEMA SĄRAŠAS	89
SUMMARY IN ENGLISH	91
PRIEDAI ¹	107
A priedas. Bendraautorių sutikimai teikti publikacijose skelbtą mokslinę medžiagą daktaro disertacijoje	108
B priedas. Autoriaus mokslinių publikacijų disertacijos tema kopijos.....	113

¹ Priedai pateikti atskiroje elektroninėje laikmenoje

Contents

INTRODUCTION	1
Formulation of the problem.....	1
The relevance of the thesis	2
The object of the research.....	2
The aim of the thesis	3
The objectives of the thesis	3
Research methodology	3
The scientific novelty of the thesis.....	3
The practical value of the research findings.....	3
The defended statements	4
The approval of the research findings	4
The structure of the thesis.....	5
 1. THE REVIEW OF DISCRETE ELEMENT METHOD AND THE DAMPING MODELS	 7
1.1. Discrete element method.....	7
1.2. Particle systems simulation	9
1.3. Conception of the discrete element method	10
1.4. Interacting bodies kinematics vector algebra	11
1.5. Contact forces models of particles normal contact	13

1.6. Elastic deformations corresponding force	14
1.7. Damping force.....	15
1.8. Equations of motion	17
1.9. Viscoelastic interaction models.....	18
1.9.1. Linear spring model	19
1.9.2. Lee and Hermann model	20
1.9.3. Tsuji model	20
1.9.4. Brilliantov model	20
1.9.5. Hu model.....	21
1.10. Conclusions of Chapter 1 and formulation of the objectives	22
 2. GENERALIZED DAMPING MODEL DEVELOPMENT AND APPLICATION	25
2.1. The equation of motion nondimensional expression derivation.....	26
2.2. Damping function $C(h)$ nondimensional damping coefficients c calculation	29
2.3. The analysis of nondimensional contact force	31
2.4. Two particles contact	35
2.4.1. Comparison of different damping models coefficient of restitution dependencies of the initial contact velocity	35
2.4.2. Comparison of contact force, overlap and overlap velocity parameters	39
2.4.3. The comparison of experimental and theoretical determined parameters of metal and rubber half-spheres	42
2.5. Wave propagation in particles chain	43
2.5.1. The object of investigation and simulation data	45
2.5.2. Simulation and experiment results comparison of the force wave propagation in particles chain	46
2.5.3. Simulation results of particles wave propagation velocity in uniform particles chain	48
2.5.4. Particles chain kinetic energy investigation	55
2.6. Multispherical particles contact parameters comparison	58
2.7. Conclusions of Chapter 2	61
 3. NONDIMENSIONAL VISCOELASTIC DAMPING CONSTANTS APPROXIMATION	63
3.1. The main dependencies	64
3.1.1. Viscoelastic damping model parameters selection methodology ..	68
3.1.2. Numerical solution of the equation 3.22 and damping model parameters selection algorithm	71
3.2. An application of the new model	73

3.3. Conclusions of Chapter 3	81
GENERAL CONCLUSIONS.....	83
REFERENCES	85
LIST OF SCIENTIFIC PUBLICATIONS BY THE AUTHOR ON THE TOPIC OF THE DISSERTATION.....	89
SUMMARY IN ENGLISH	91
ANNEXES ¹	107
Annex A. Agreements of co-authors to provide published material in the thesis	108
Annex B. Copies of scientific publications bu the author on the topic of the thesis	113

¹The annexes are supplied in the enclosed compact disc

Išvadas

Problemos formulavimas

Dauguma gamtoje esančių natūralių medžiagų, o taip pat dalis pramoniniu būdu sukurtų medžiagų turi nehomogeninę struktūrą ir yra sudarytos iš dalelių. Tokių dalelių pavidalo terpių skaitinis modeliavimas yra sudėtingas, todėl jis išpopuliarėjo tikrai pastaraisiais dešimtmečiais sukūrus diskrečiųjų elementų metodą ir išaugus kompiuterinio skaičiavimo galimybėms. Diskrečiųjų elementų metodas yra skaitinis metodas, kuris nagrinėja dalelių struktūras ir aprašo pavienių dalelių judėjimą. Dalelių sąveika apibūdinama kontaktinėmis jėgomis, tarp kurių slopinimas užima ypatingą vietą, tačiau slopinimo modeliai nėra pakankamai ištirti.

Disertacinis darbas skirtas normalinio kontakto tarp dalelių, tamprią sąveiką aprašant Herco arba Huko modeliu, slopinimo modelių tyrimams.

Darbo aktualumas

Makroskopinė dalelių sistemos elgsena priklauso nuo dalelių kontakto, todėl tinkamas dalelių kontakto modeliavimas yra ypač svarbus uždavinys dalelių sistemų modeliavimui. Tampri dalelių sąveika yra aiškiai apibrėžta, o jos

modeliavimas duoda tikslius rezultatus ir papildomi tyrimai nėra reikalingi, tačiau klampiatampraus slopinimo modeliai taikomi DEM iki šiol nebuvo tinkamai ištirti ir apibendrinti.

Šiuo metu DEM naudojami slopinimo modeliai nėra pagrįsti kontaktuojančių dalelių mechanika. Dėl slopinimo modelių taikymo rekomendacijų trūkumo neaišku kada taikyti vieną ar kitą slopinimo modelį. Kita problema – esamuose DEM slopinimo modeliuose yra daug nežinomos prigimties dimensinių ar nedimensinių konstantų ir koeficientų, kurių fizikinė prasmė yra neaiški arba šių dydžių skaitinės reikšmės nėra fiziškai apibrėžtos. Tai apsunkina esamų slopinimo modelių taikymus dalelių sistemų modeliavimui. Žinoma, kad daugelio medžiagų restitucijos koeficientas priklauso nuo pradinio kontakto greičio, tačiau taikant esamus slopinimo modelius tik iš dalies galima atsižvelgti į pradinio kontakto greičio įtaką restitucijos koeficientui. Todėl aktualu pasiūlyti DEM tinkamą t. y. pakankamai nesudėtingą metodiką, kuri leistų tiksliau nei esami modeliai įvertinti pradinio kontakto greičio įtaką dalelės elgsenai kontakto metu.

Tyrimų objektas

Darbo tyrimų objektas – normalinio kontakto klampiatampraus slopinimo modeliai taikomi diskrečiųjų elementų metode.

Darbo tikslas

Sukurti diskrečiųjų elementų metodui tinkamą normalinio kontakto klampiatampraus slopinimo metodiką, leidžiančią atsižvelgti į restitucijos koeficiento ir pradinio kontakto greičio sąryšį.

Darbo uždaviniai

1. Atlikti diskrečiųjų elementų metode taikomų normalinio kontakto slopinimo modelių apžvalgą ir šių modelių lyginamąją analizę. Įvertinti esamų modelių privalumus ir trūkumus.
2. Sudaryti apibendrintą dalelių normalinio kontakto klampiatampraus slopinimo modelį.

3. Išanalizuoti esamų slopinimo modelių savybes, modeliuojant dviejų dalelių sąveiką ir bangos sklidimą dalelių grandinėje, taikant apibendrintą modelį.
4. Pritaikyti sukurtą modelį įvertinti restitucijos koeficiento priklausomybei nuo pradinio kontakto greičio.

Tyrimų metodika

Tyrimai atlikti taikant diskrečiųjų elementų metodą, klampiatamprės sąveikos normalinio kontakto mechaniką, nedimensinės analizės, aproksimacijos bei optimizacijos teorijas. Nagrinėjami skaičiavimo metodai realizuotos C++ ir Fortrano algoritminėmis kalbomis.

Darbo mokslinis naujumas

Disertacijoje sudarytas apibendrintas klampiatampraus normalinio slopinimo modelis skirtas diskrečiųjų elementų metodui. Naujasis modelis apima ir plačiausiai taikomus esamus klampiatampraus slopinimo modelius, kuriuos galima vertinti kaip atskirus naujojo modelio atvejus su skirtingais laipsnio rodikliais.

Disertacijoje atlikta esamų diskrečiųjų elementų metodo normalinio kontakto klampiatampraus slopinimo modelių išsami analizė ir jų rezultatų palyginimas tiek tarpusavyje, tiek su eksperimentiniais rezultatais. Remiantis atlikta analize duotos konkrečios klampiatamprių normalinės sąveikos modelių taikymo rekomendacijos diskrečiųjų elementų metodui.

Pasiūlytas naujas klampiatamprio normalinio kontakto skaičiavimo metodas, kuri leidžia pasinaudojant sudarytu slopinimo modeliu atsižvelgti į normalinio kontakto restitucijos koeficiento priklausomybę nuo pradinio kontakto greičio.

Darbo rezultatų praktinė reikšmė

Atlikta esamų klampiatamprių normalinės sąveikos modelių lyginamoji analizė leido sudaryti praktines šių modelių taikymo rekomendacijas tinkamas diskrečiųjų elementų metodui.

Pasiūlyta nauja tikslesnė klampiatamprės normalinės sąveikos metodika, kurioje atsižvelgiama į restitucijos koeficiento priklausomybę nuo pradinio kontakto greičio.

Ginamieji teiginiai

1. Sukurtas apibendrintas klampiatampraus slopinimo modelis, tinkamas naudoti diskrečiųjų elementų metode.
2. Taikant esamus klampiatampraus slopinimo modelius skirtingai vertinama pradinio greičio įtaka ir gaunami nevienareikšmiai modeliavimo rezultatai. Darbe pasiūlyta tirtų klampiatampraus normalinio slopinimo modelių taikymo rekomendacijos ir nustatytos atsirandančių rezultatų skirtumų pagrindinės priklausomybės.
3. Pasiūlyta metodika leidžianti pasinaudojant apibendrinto modelio išraiška ir tiksliau nei tirti slopinimo modeliai įvertinti restitucijos koeficiento priklausomybę nuo pradinio kontakto greičio.

Darbo rezultatų aprobavimas

Disertacijos tema išspausdinti trys moksliniai straipsniai: (Markauskas *et al.* 2015; Kačianauskas *et al.* 2016) ISI Web of Science žurnaluose, turinčiuose citavimo rodiklį, (Kačianauskas *et al.* 2015) tarptautinės duomenų bazės cituojamame žurnale. Disertacijoje atlikti tyrimai ir jų rezultatai buvo aprobuoti 9 mokslinėse konferencijose Lietuvoje ir užsienyje:

1. Comparison of Various Damping Models for Multiple-Contact Behavior of particles. 7th International Conference for Conveying and Handling of Particulate Solids – ChoPS, 2012, Frydrishafene, Vokietijoje;
2. Slopinimo modelių įtaka dalelių stulpelio elgsenai. XXI Lietuvos skaičiuojamosios mechanikos seminaras, 2013, Vilniuje;
3. Dissipative Contact of Particles – Review and Comparison of Discrete Element Contact Models. 20th International Conference On Computer Methods In Mechanics, 2013, Varšuvoje, Lenkijoje;
4. Klampiatamprių slopinimo Diskrečiųjų Elementų Metode modelių skaitinis tyrimas. IV-oji jaunųjų mokslininkų konferencija, 2014, Vilniuje;

5. Klampiatamprių slopinimo modelių įtaka dalelių sistemos elgsenai. Respublikinis XXII Lietuvos skaičiuojamosios mechanikos seminaras, 2014, Vilniuje;
6. Critical assessment of visco-elastic damping models used in DEM simulations. The 7th World Congress on Particle Technology (WCPT7), 2014, Beijing, Kinijoje;
7. Contribution of Visco-elastic Damping Effects in Contact of particles. 8th International Conference for Conveying and Handling of Particulate Solids – ChoPS, 2015, Tel Avive, Izraelyje;
8. Slopinimo modelių naudojimo diskrečiųjų elementų metode ypatumai. Respublikinis XXIV Lietuvos skaičiuojamosios mechanikos seminaras, 2016, Vilniuje;
9. Improvement of viscoelastic damping for Hertz contact of particles due to impact velocity. Modern Building Materials, Structures and Techniques – MBMST, 2016, Vilniuje.

Disertacijos struktūra

Disertaciją sudaro įvadas, trys skyriai ir bendrosios išvados. Darbo apimtis – 105 puslapiai, 122 formulės, 31 paveikslas ir 7 lentelės. Rašant disertaciją buvo panaudoti 68 literatūros šaltiniai.

Diskrečiųjų elementų metodo ir slopinimo modelių apžvalga

Šiame skyriuje glaustai apžvelgtas diskrečiųjų elementų metodas, pateikta jo metodologija. Akcentuojamas tik normalinis kontaktas, tangentinė ir riedėjimo sąveikos neapžvelgiamos nes šios sąveikos tolimesniame disertacijos tekste nenagrinėjamos. Pateikiami populiariausi šio metodo normalinio kontakto slopinimo modeliai. Atlikta literatūros analizė ir padarytos išvados sąlygoja tolimesnių tyrimų kryptį – diskrečiųjų elementų metode naudojamų slopinimo modelių analizę. Skyriuje pateikta medžiaga publikuota straipsnyje (Kačianauskas *et al.* 2015).

1.1. Diskrečiųjų elementų metodo koncepcija

Diskrečiųjų elementų metodas (DEM) yra skaitinis metodas plačiai taikomas modeliuojant dalelių sistemas. Nors istoriškai, DEM pradėtas taikyti birių medžiagų modeliavimui (Cundall ir Strack 1979), tačiau šiuo metu, šis metodas vis plačiau taikomas uždaviniams kurie anksčiau buvo formuluojami tik kontinuumo teorijos rėmuose: kieto deformuojamo kūno mechanikoje (Griffiths ir Mustoe 2001; Johnson 1985; Shafer, Dippel, ir Wolf 1996; Wriggers 2006) ir

skysčių mechanikoje (Sun, Sakai, ir Yamada 2013). DEM prielaidos ir taikomi metodai priklauso nuo uždavinio, tačiau yra viena bendra ypatybė – dalelės judėjimas aprašomas antruoju Niutono dėsnio (Rosas, Buceta, ir Lindenberg 2003), o dalelėms sąveikaujant atsiranda kontakto jėgos.

Dažniausiai birios medžiagos modeliuojamos kaip rinkinys diskrečių deformuojamų klampiai-tamprių sferų. Yra žinoma dalelių geometrija, dalelių mechaninės ir fizikinės savybės. Taip pat žinoma pagal kokius dėsnius dalelės kontaktuoja tarpusavyje ir su kitais kūnais, pavyzdžiui daleles talpinančio kūno paviršiumi. Daroma prielaida, kad daleles talpinantis kūnas yra absoliučiai standus. Skaičiavimo metu kiekviena dalelė yra vertinama kaip atskiras erdvėje judantis kūnas kontaktuojantis su aplinkiniais objektais. Metodo pagalba galima nustatyti dalelių linijinius ir kampinius greičius, poslinkius ir koordinates kiekvienu laiko momentu.

Priklausomai nuo modeliuojamos medžiagos savybių, modeliuojant dalelių sistemą yra taikomi du skirtingi DEM metodai. „Kietos sferos“, arba kitaip vadinamas įvykio metodas, yra taikomas tada, kai dalelės judėjimas erdvėje yra daug kartų ilgesnis nei kontakto laikas tarp dalelių. Tikslusis „Minkštos sferos“, arba kitaip vadinamas vyksmo metodas, DEM skaičiavimuose naudojamas kai sąveika tarp dalelių trunka santykinai ilgai lyginant su laisvu dalelės judėjimu. Toliau bus aptariamas tikslus vyksmo metodas.

Vienas iš pagrindinių DEM privalumų yra tas, kad medžiagų modeliavime taikant DEM metodą galima nustatyti įvairius dalelių sistemos elgsenos ypatumus, kuriuos, kitais atvejais, reikėtų įvertinti taikant sudėtingas apytiksles metodikas. Modeliuojant sudėtingus procesus ir ieškant sprendinių kompleksiniams uždaviniams šį metodą galima kombinuoti ir su kitais skaičiavimo metodais (FEM – baigtinių elementų metodas, CFD – skaičiuojamosios skysčių mechanikos metodas). Pagal sąlyginę dalelės skersmenį D , DEM modeliuojamos labai skirtingų matmenų dalelės: makrodalelės $D \in [200 \mu\text{m}, 10 \text{ m}]$; mikrodalelės $D \in [0,1 \mu\text{m}, 200 \mu\text{m}]$; nanodalelės $D \in [1,0 \cdot 10^{-9} \text{ m}, 100,0 \cdot 10^{-9} \text{ m}]$, molekulės, atomai, bakterijos ląstelės ir kita. Taip pat, DEM metodu modeliuojamos sistemos kai tarp dalelių veikia įvairios sąveikos: kontakto jėgos, elektromagnetinės, gravitacinės, hidrodinaminės ir t. t. Tad DEM taikomas labai plačiai nuo smėlio iki biologinių sistemų modeliavimo (Daraio *et al.* 2005; Harbola *et al.* 2009; Horie ir Yano 1999; Nesterenko *et al.* 2005; Thomas, Papargyri-Beskou, ir Mylonakis 2009; Wensrich ir Stratton 2011; Zamani ir El Shamy 2011; He *et al.* 2010; Horabik ir Molenda 2016).

Nors metodo taikymo galimybės yra plačios, tačiau tai reikalauja gana didelių skaičiavimo resursų. Verta paminėti, kad dalelių medžiagos savybių parametrus ne visada paprasta nustatyti, todėl jie dažnai parenkami priartėjimo būdu, o papildomos parinkimo procedūros reikalauja papildomo laiko. Vienas

didžiausių trūkumų taikant DEM yra dalelių formos atkartojimas. Sudėtingos geometrijos dalelių kontakto nustatymas ir kontakto jėgų skaičiavimas yra komplikuoatas, todėl dažniausiai yra naudojamos sferinės ar multisferinės formos dalelės, kurių modeliavimas paprastesnis. Nors DEM taikomas labai plačiai (Džiugys ir Peters 2001), tačiau nėra vieningos modeliavimo teorijos (Aranson ir Tsimring 2009), o dalelių kontakto jėgos skaičiuojamos labai įvairiai (Tomas 2004). Visuotinai priimti Huko ir Herco dėsniai tinka tik tamprių dalelių kontakto jėgų skaičiavimui (MacHado *et al.* 2012) tačiau klampiatamprio dalelių kontakto jėgos arba dar kitaip vadinamos slopinimo jėgos skaičiuojamos skirtingai (Kruggel-Emden *et al.* 2007; Kruggel-Emden, Wirtz, ir Scherer 2009). Daugelis esamų modelių yra euristiniai, sudaryti remiantis daugiau intuityviu požiūriu nei fizikines reiškinius ar kontakto mechanika. Esamuose slopinimo modeliuose figūruoja įvairios konstantos ir koeficientai, kurie arba nėra apibrėžti (N. V. Brilliantov *et al.* 1996) (šiuo atveju reikalingos konstantų skaitinės reikšmės parenkamos priartėjimo būdu) arba šių konstantų kilmė ir skaitinės reikšmės niekaip nesusijusios su kontaktuojančių dalelių mechanika. Nors slopinimo reiškinio atsiradimo priežastys gali būti įvairios, tačiau praktikoje dažniausiai naudojamas yra klampiatampraus slopinimo modelis kai energijos nuostoliai įvertinami restitucijos koeficientu (Malone ir Xu 2008; Alizadeh, Bertrand ir Chaouki 2013; Ramírez *et al.* 1999).

1.2. Dalelių sistemų modeliavimas

Reikia pabrėžti, kad daugelio dalelių sistemų modeliavimas DEM reikalauja labai didelių skaičiavimo sąnaudų (Balevičius *et al.* 2006; Balevičius *et al.* 2007; Freireich, Litster, ir Wassgren 2009; Gilardi ir Sharf 2002). Kontaktų paieška ir kontakto jėgų apskaičiavimas yra vieni iš daugiausiai laiko reikalaujančių procedūrų. Tai riboja diskrečiųjų elementų metode taikomų kontakto modelių pasirinkimą; reikia suderinti prieštarigus dalykus: kontakto modelio paprastumą iš vienos pusės ir modelio tikslumą iš kitos. Taikant vienodoms pradinėms sąlygoms skirtingus slopinimo modelius galima gauti skirtingus rezultatus. Tačiau, bendrai paėmus, DEM nėra apibrėžta, kada koks slopinimo modelis turi būti naudojamas. Kitaip sakant nėra slopinimo modelių taikymo rekomendacijų. Todėl vienas iš darbo tikslų – pateikti esamų DEM slopinimo modelių taikymo rekomendacijas.

Daug tyrinėjimų atlikta per pastarus tris dešimtmečius norint suprasti bangos sklidimą ir papildyti esamas žinias (Falcona *et al.* 1998; Nguyen ir Brogliato 2012; Job *et al.* 2007, 2008; Luding *et al.* 1994; Santibanez *et al.* 2011). Dauguma šių teorinių skaičiavimų atlikti siekiant ištirti kontakto jėgos kitimą dalelių sistemoje ir palyginti jį su nustatyto eksperimento metu. Teorinė

analizė skirta ištirti jėgos sklidimą grandinėje įvairiais aspektais, kuris skiriasi nuo bangos sklidimo kontinuume. Reikėtų paminėti, kad dalelių bangos problema yra aktuali sprendžiant bunkerių virpėjimo, medžiagų technologijos, gruntų mechanikos ir seisminių skaičiavimų uždavinius.

1.3. Diskrečiųjų elementų metodo koncepcija

Sąveikaujantys kūnai apibrėžiami taip: dvi sąveikaujančios dalelės žymimos i ir j raidėmis, tuo tarpu kraštinių sąlygų paviršius – b raide. i arba j dalelės atitinkamos savybės žymimos savybės raide su i arba j indeksais, pavyzdžiui E_i ar E_j . Dydžiai susiję su dviejų i ir j dalelių sąveika žymimi ij indeksu, o susiję su dalelės ir sienos sąveika – ib indeksu. Normalinę sąveiką nurodo n , o tangentinę t indeksai.

Disertacijoje nagrinėjamos sferiškos R_i spindulio dalelės. Kiekviena dalelė apibūdinama tokiomis nekintamomis laike fizikinėmis savybėmis: tamprumo moduliui E_i , Puasono koeficientui μ_i ir tankiu ρ_i . i dalelės judėjimas trimatėje erdvėje apibūdinamas tokiais vektoriais, žiūrėti 1.1 paveikslą: koordinačių vektoriumi \mathbf{x}_i kurio pradžia yra koordinačių pradžios taške O , o viršūnė – i dalelės svorio centre; linijinio greičio ir pagreičio vektoriais – $\mathbf{v}_i(t) = d\mathbf{x}_i(t)/dt$ ir $\mathbf{a}_i(t) = d\mathbf{v}_i(t)/dt$; kampinio greičio ir pagreičio vektoriais – $\boldsymbol{\omega}_i(t) = d\boldsymbol{\theta}_i(t)/dt$ ir $\boldsymbol{\varepsilon}_i(t) = d\boldsymbol{\omega}_i(t)/dt$. Reikia pabrėžti, kad bendruoju atveju trimatėje erdvėje dalelės pasisukimas negali būti apibrėžtas jokių vektoriumi, todėl $\boldsymbol{\omega}_i(t)$ negali būti integruojamas (Argyris 1982). Dalelės pasisukimui taikomi pasukimo matricos, tenzoriai ar dar kitaip vadinami kvarterijonai. Tačiau sferiškų dalelių pasisukimo orientacija nėra svarbi, kadangi sfera yra simetriška. Todėl galima taikyti ir vektorius.

Dalelių susidūrimas yra traktuojamas kaip dalelių tūrių persidengimas kontakto taške C_{ij} . Kraštinės sąlygos yra aprašomos kaip tam tikro kreivio paviršiai. Dalelių kontaktas su plokštumomis traktuojamas kaip tos dalelės kontaktas su begalinio spindulio ir begalinės masės dalele. Šis metodas leidžia modeliuoti dalelių sistemą, modeliuojant kiekvieną dalelę atskirai. i -tosios dalelės judėjimas aprašomas antruoju Niutono dėsnio. Kiekvienos dalelės koordinatės, ir greitis randami integruojant diferencialines judėjimo lygtis:

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i(t)}{dt^2} = \mathbf{F}_i(t), \quad (1.1)$$

$$I_i \frac{d^2 \boldsymbol{\theta}_i(t)}{dt^2} = \mathbf{M}_i(t), \quad (1.2)$$

čia $i \in \mathbb{I}_p = \{1, \dots, N\}$, N yra dalelių skaičius, \mathbb{I}_p – dalelių indeksų aibė; $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)^T$ ir $\boldsymbol{\theta}_i = (\theta_{x,i}, \theta_{y,i}, \theta_{z,i})^T$ yra i dalelės svorio centro koordinatinių ir posūkio kampo vektoriai; m_i ir I_i – i dalelės masė ir inercijos momentas; $\mathbf{F}_i = (F_{x,i}, F_{y,i}, F_{z,i})^T$ ir $\mathbf{M}_i = (M_{x,i}, M_{y,i}, M_{z,i})^T$ yra dalelę veikiančios jėgos sukimo momento vektoriai; x , y ir z yra koordinatės arba indeksai nurodantys atitinkamas koordinatas. (1.1) ir (1.2) formulių \mathbf{F}_i jėgos ir \mathbf{M}_i sukimo momentai skaičiuojami taip:

$$\mathbf{F}_i = m_i \mathbf{g} + \sum_{j \in \mathbb{I}_p \setminus i} \mathbf{F}_{ij}, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{M}_i = \sum_{j \in \mathbb{I}_p \setminus i} \mathbf{M}_{ij} = \sum_{j \in \mathbb{I}_p \setminus i} \mathbf{F}_{i,j} \times \mathbf{d}_{C,ij}, \quad (1.4)$$

čia \times reiškia vektorinę sandaugą, $\mathbf{d}_{c,ij} = (d_{c,ij,x}, d_{c,ij,y}, d_{c,ij,z})^T$ yra vektorius jungiantis i dalelės svorio centrą ir i ir j dalelių kontakto tašką C_{ij} ; \mathbf{F}_{ij} – jėgos vektorius kurio pradžia yra C_{ij} kontakto taške, \mathbf{F}_{ij} yra kolinearus $\mathbf{d}_{c,ij}$ vektoriumi; \mathbf{M}_{ij} – sukimo momento vektorius. \mathbf{M}_{ij} susidaro dėl dalelių sąveikos tangentine kryptimi, pavyzdžiui dėl trinties. \mathbf{F}_{ij} vektorius gali būti išreikštas kaip jo komponentų normaline ir tangentine kryptimis $\mathbf{F}_{C,n,ij}$ ir $\mathbf{F}_{C,t,ij}$ suma $\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{C,n,ij} + \mathbf{F}_{C,t,ij}$.

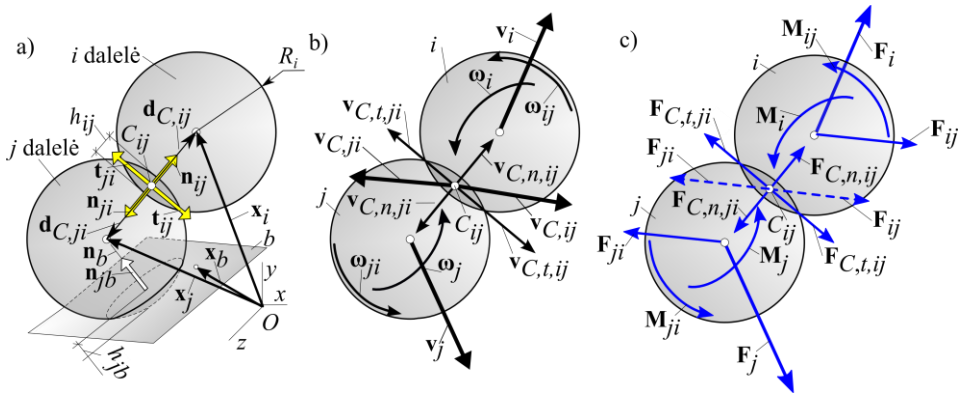
1.4. Sąveikaujančių kūnų kinematikos vektorinė algebra

Dviejų sąveikaujančių sferinių dalelių geometrija ir pagrindiniai dydžiai pavaizduoti 1.1 paveikslo a dalyje. Šiame paveiksle pavaizduoti sutampantys i ir j dalelių kontakto taško taškai C_{ij} ir C_{ji} todėl 1.1 a) paveiksle pavaizduotas tik vienas C_{ij} taškas. Vektorius jungiantis i ir j dalelių centrus $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$, be to $\mathbf{x}_{ji} = -\mathbf{x}_{ij}$. Diskrečiųjų elementų metode yra priimta, kad i ir j dalelių sąveikos atstojamoji $\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{C,n,ij} + \mathbf{F}_{C,t,ij}$ veikia kontakto taške C_{ij} esančiame ant \mathbf{x}_{ij} vektoriaus. Kai dalelės identiškos tuomet C_{ij} kontakto taškas randasi \mathbf{x}_{ij} viduryje. Kai dalelė kontaktuoja su plokštuma ar paviršiumi C_{ij} kontakto taškas yra ant tiesės statmenos plokštumai ir einančiai per šios dalelės svorio centrą. Kontakto normalinė kryptis apibūdinama vienetiniu vektoriumi \mathbf{n}_{ij} ; kai tarpusavyje kontaktuoja dvi dalelės tuomet: $\mathbf{n}_{ij} = \mathbf{x}_{ij} / \|\mathbf{x}_{ij}\|$, čia $\|\mathbf{x}_{ij}\|$ – vektoriaus Euklidinė norma arba vektoriaus ilgis, pavyzdžiui $\|\mathbf{x}_i\| = \sqrt{(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)}$. Kai dalelė kontaktuoja su plokštuma, tuomet: $\mathbf{n}_{ij} = \mathbf{x}_b$, čia \mathbf{x}_b yra vektorius kuris prasideda dalelės ir plokštumos kontakto taške ir nukreiptas į dalelės svorio centrą, žiūrėti 1.1 a) paveikslą.

Dviejų dalelių sąveika normaline kryptimi apibūdinama skaliarinio dydžio h_{ij} vadinamu persidengimu: $h_{ij} = R_i + R_j - \|\mathbf{x}_{ij}\|$, čia R_i ir R_j yra i ir j dalelių

spinduliai. Akivaizdu, kad $h_{ji} = h_{ij}$, kadangi $h_{ji} = R_j + R_i - \|\mathbf{x}_{ji}\| = R_i + R_j - \|\mathbf{x}_{ij}\|$. Kai dalelė sąveikauja su plokštuma, tuomet $h_{ib} = R_i - \mathbf{n}_b \bullet (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_b)$, čia \bullet reiškia vektorių skaliarinę sandaugą, \mathbf{x}_b plokštumos lokalizaciją apibūdinantis vektorius, jis prasideda x, y, z koordinačių pradžioje O , o jo viršūnė priklauso plokštumai.

Santykinis linijinis i dalelės C_{ij} kontakto taško greitis j dalelės C_{ji} kontakto taško atžvilgiu yra toks, žiūrėti 1.1 b) paveikslą: $\mathbf{v}_{C,ij} = \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{d}_{C,ij} - \mathbf{v}_j - \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{d}_{C,ji}$, čia \mathbf{v}_i ir \mathbf{v}_j esti atitinkamų dalelių svorio centrų linijinių greičių vektoriai, o $\boldsymbol{\omega}_i$ ir $\boldsymbol{\omega}_j$ šių dalelių sukimosi apie jų svorio centrą kampinių greičių vektoriai, ženklas \times reiškia vektorinę sandaugą; vektoriai $\mathbf{d}_{C,ij}$ ir $\mathbf{d}_{C,ji}$ kurie prasideda kontakto taške C_{ij} ir baigiasi i ir j dalelių svorio centruose yra tokie: $\mathbf{d}_{C,ij} = -(R_i - 1/2h_{ij})\mathbf{n}_{ij}$. Dalelės kontaktuojančios su plokštuma kontakto taško C_{ib} santykinis greitis $\mathbf{v}_{C,ib} = \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{d}_{C,ib} - \mathbf{v}_j$. $\mathbf{v}_{C,ij}$ santykinio linijinio greičio tangentinė ir normalinė komponentės $\mathbf{v}_{C,n,ij}$ ir $\mathbf{v}_{C,t,ij}$ yra tokios: $\mathbf{v}_{C,n,ij} = (\mathbf{v}_{C,ij} \bullet \mathbf{n}_{ij}) \mathbf{n}_{ij}$ ir $\mathbf{v}_{C,t,ij} = \mathbf{v}_{C,ij} - \mathbf{v}_{C,n,ij}$.



1.1 pav. Dalelių sąveikos schema: a) – būdingų sąveikos taškų vektoriai, b) – linijinių ir kampinių greičių vektoriai, c) – jėgų ir momentų vektoriai

Fig. 1.1. Particles interaction scheme: a) is vectors of appropriate interaction points, b) is vectors of linear and angular velocities c) is vectors of forces and moments

Reikia pabrėžti, kad nėra vieningos DEM vienetinio tangentinio vektoriaus \mathbf{t}_{ij} arba \mathbf{t}_{ji} apibrėžimo (Zabulionis *et al.* 2012). Yra bent trys \mathbf{t}_{ij} apibrėžimai: $\mathbf{t}_{ij} = \mathbf{F}_{C,t,ij}/\|\mathbf{F}_{C,t,ij}\|$, $\mathbf{t}_{ij} = -\mathbf{v}_{C,t,ij}/\|\mathbf{v}_{C,t,ij}\|$ ir $\mathbf{t}_{ij} = -\boldsymbol{\delta}_{C,t,el}/\|\boldsymbol{\delta}_{C,t,el}\|$, čia $\boldsymbol{\delta}_{C,t,el}$ hypoelastinis kontakto taško C_{ij} poslinkis. Smulkiau apie tai žiūrėti (Zabulionis *et al.* 2012).

1.5. Dalelių normalinio kontakto jėgų modeliai

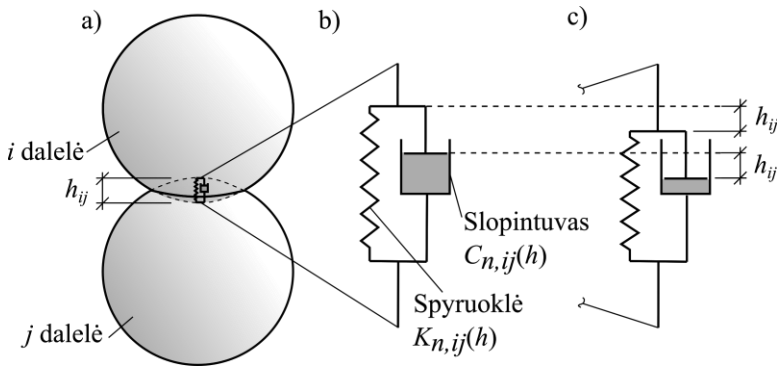
Dalelių sąveikos modelis apibūdina sąryšį tarp kontakto jėgos \mathbf{F}_{ij} ir poslinkio arba dalelių deformavimo. \mathbf{F}_{ij} kontakto jėga veikianti tarp i ir j dalelės išskaidoma į dvi dedamąsias: normalinę ir tangentinę $\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{C,n,ij} + \mathbf{F}_{C,t,ij}$, čia $\mathbf{F}_{C,n,ij}$ ir $\mathbf{F}_{C,t,ij}$ yra normalinė ir tangentinė dedamosios veikiančios C_{ij} taške, žiūrėti 1.1 b) paveikslą. Kai į riedėjimo pasipriešinimą neatsižvelgiama sukimo momentas veikiantis i dalelės svorio centrą $\mathbf{M}_{ij} = \mathbf{F}_{t,n,ij} \times \mathbf{d}_{C,t,ij}$. Reikia pabrėžti, kad DEM kontakto jėgų nustatymas yra daugiausiai laiko reikalaujanti modeliavimo operacija.

Normalinė $\mathbf{F}_{C,n,ij}$ jėga veikia kontakto taške C_{ij} ir yra kolineari linijai jungiančiai C_{ij} tašką ir i dalelės svorio centrą. Todėl $\mathbf{F}_{C,n,ij}$ nesukuria jokio sukimo momento i dalelės svorio centro atžvilgiu. Todėl, patogumo dėlei, $\mathbf{F}_{C,n,ij}$ ir $\mathbf{F}_{C,n,ji}$ vektoriai gali būti perstumti taip, kad šių vektorių pradžia sutaptų su i ir j dalelių svorio centrais, žiūrėti, 1.1 c) paveikslą. Tangentinių $\mathbf{F}_{t,n,ij}$ ir $\mathbf{F}_{t,n,ji}$ jėgų vektoriai taip pat gali būti perstumti taip, kad jų pradžia sutaptų su dalelių svorio centrais, tačiau, papildomai $\mathbf{M}_{ij} = \mathbf{F}_{t,n,ij} \times \mathbf{d}_{C,t,ij}$ ir $\mathbf{M}_{ji} = \mathbf{F}_{t,n,ji} \times \mathbf{d}_{C,t,ji}$ sukimo momentai turi būti pridėti prie dalelių (1.1 c) pav.). Kadangi $\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{C,n,ij} + \mathbf{F}_{C,t,ij}$ (1.1 c) pav.). punktyriniai vektoriai, tai yra \mathbf{F}_{ij} ir \mathbf{F}_{ji} vektoriai gali būti perstumti taip pat taip, kad jų pradžia sutaptų su i ir j dalelių svorio centrais. Iš čia matyti, kad \mathbf{F}_{ij} ir \mathbf{F}_{ji} jėgų vektoriai gali būti nagrinėjami ir kaip jėgos veikiančios i ir j dalelių svorio centruose. Taip patogų apibūdinant tik dviejų dalelių sistemos daleles veikiančių jėgų atsyjamąsias. Šiuo atveju, $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{ij}$ ir $\mathbf{F}_j = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{ji}$. Reikia pabrėžti, kad šiame darbe trinties jėgos nevertinamos t. y. imama, kad $\mathbf{F}_{C,t,ij} = 0$, todėl daugiau apie $\mathbf{F}_{C,t,ij}$ ir nuo jo susidarancius sukimo momentus \mathbf{M}_{ij} nebus kalbama.

Normalinė dviejų kūnų sąveika gali būti modeliuojama pasitelkiant Kelvino reologinį modelį bendruoju atveju sudarytą iš lygiagrečiai sujungtų netiesiškai tamprios spyruoklės ir netiesinio slopintuvo (1.2 pav.).

Kadangi spyruoklė ir slopintuvas sujungti lygiagrečiai tuomet dviejų kūnų (dalelės ir dalelės arba dalelės ir paviršiaus) normalinės sąveikos arba kontakto jėga gali būti išreikšta tamprią deformaciją atitinkančios dedamosios $\mathbf{F}_{n,el,ij}$ ir slopinimą atitinkančios dedamosios $\mathbf{F}_{n,d,ij}$ suma:

$$\mathbf{F}_{n,ij}(h_{ij}) = \mathbf{F}_{n,el,ij}(h_{ij}) + \mathbf{F}_{n,d,ij}(h_{ij}). \quad (1.5)$$



1.2 pav. Dalelių normalinio kontakto schema: a) – sąveikaujančios dalelės, b) ir c) – normalinės sąveikos nedeformuotas ir deformuotas Kelvino reologinis modelis

Fig. 1.2. Normal interaction of the particles: a) shows interacting particle, b) and c) show undeformed and deformed Kelvin's rheological model of normal interaction

Reikia pabrėžti, kad (1.5) formulė yra Kelvino reologinis modelis, leidžiantis bent iš dalies apibūdinti kieto kūno klampiatamprią elgseną. Kitas paprasčiausias reologinis Maksvelo modelis sudarytas iš nuosekliai sujungtų spyruoklės ir slopintuvo, kieto kūno deformavimui apibūdinti netinka jis gali būti taikomas skysčiams. Detaliau šiame darbe taikomas slopinimo modelis analizuojamas 1.7 poskyryje.

1.6. Tampiųjų deformacijas atitinkanti jėga

Diskrečiųjų elementų metode taikomas tampraus normalinio kontakto modelis yra paremtas prielaida jog kontaktuojančių dalelių i ir j deformacija, supaprastinimo dėlei, pakeičiama dalelių persidengimu h_{ij} (1.2 pav.). Tuomet tamprią sąveiką atitinkanti $\mathbf{F}_{el,n,ij}$ jėga išreiškiama kaip funkcija priklausanti nuo persidengimo h_{ij} .

Paprasčiausias yra tiesinis $\mathbf{F}_{el,n,ij} = \mathbf{n}_{ij}K_{n,ij}h_{ij}$ modelis, čia $K_{n,ij}$ normalinės sąveikos standumo koeficientas pateiktas (1.7) formulėje. Jis yra paremtas Huko dėsniu. Šis modelis pirmą kartą buvo panaudotas Kundalo ir Strakso (Cundall ir Strack 1979).

Pagal Herco tikslų tampiųjų sferinių dalelių normalinės sąveikos kontakto jėgos sprendinį, $\mathbf{F}_{el,n,ij} = \mathbf{n}_{ij}K_{n,ij}h_{ij}^{3/2}$, t. y. $\mathbf{F}_{el,n,ij}$ nuo persidengimo h_{ij} priklauso netiesiškai. Nors tiesinis $\mathbf{F}_{el,n,ij} = \mathbf{n}_{ij}K_{n,ij}h_{ij}$ dėsnis nėra tikslus, tačiau dėl mažų

skaičiavimo sąnaudų ir paprastumo yra vis dar vienas populiariausių normalinės sąveikos dėsnių taikomų DEM.

Tiesinis ir netiesinis, t. y. paremtas Herco sprendiniu, $\mathbf{F}_{el,n,ij}$ dėsniai gali būti užrašyti tokia viena formule:

$$\mathbf{F}_{el,n,ij} = \mathbf{n}_{ij} K_{n,ij} h_{ij}^{(1+\lambda)}, \quad (1.6)$$

čia $\lambda = 0$ kai taikomas tiesinis kontakto modelis ir $\lambda = 0,5$ kai taikomas netiesinis modelis paremtas Herco sprendiniu, h_{ij} yra persidengimas, (1.2 pav.).

Standumo koeficientas išreiškiamas efektyviųjų konstantų pagalba:

$$K_{n,ij} = \frac{4}{3} E_{eff} R_{eff,ij}^{(1-\lambda)}, \quad (1.7)$$

čia $R_{eff,ij}$ yra efektyvusis spindulys:

$$R_{eff,ij} = \frac{R_i R_j}{R_i + R_j}, \quad (1.8)$$

o efektyvusis tamprumo modulis E_{eff} yra toks:

$$E_{eff,ij} = \frac{E_i E_j}{E_i (1 - \mu_j^2) + E_j (1 - \mu_i^2)}, \quad (1.9)$$

(1.8) ir (1.9) formulėse R_i , R_j , E_i , E_j , μ_i ir μ_j esti atitinkamai i ir j dalelių, spinduliai, tamprumo ir šlyties moduliai bei Puasono koeficientai.

1.7. Slopavimo jėga

Kontaktuojant dalelėms kartu su tampria sąveika susidaro ir energijos nuostoliai dėl negrįžtamųjų arba grįžtamųjų deformacinių ir judėjimo procesų: plastinių ar klampiatamprių deformacijų (Gorham ir Kharaz 2000), tamprių bangų medžiagoje ar adhezijos, kohezijos veikimo tarp labai mažų dalelių. Tamprių deformacijų, kuomet sistemos energija neprarandama, o tik perskirstoma, įtaka paprastai ignoruojama dėl santykinai mažo poveikio. Slopavimo poveikis, atsirandantis dėl plastinių deformacijų, kuomet energijos nuostolis grindžiamas medžiagos irimu, skirstomas į tampriai plastinį ir pilnai plastinį režimus. Klampiatampraus slopinimo modelis remiasi prielaida, kad energija išsisklaido kontakto metu dėl medžiagos vidinės trinties deformuojantis kūnui. Jeigu nebuvo nustatyta energijos sklaidos atsiradimo priežastis, tuomet klampiatamprės elgsenos ar plastinių deformacijų energijos sklaidos modelis gali būti panaudotas ir tuo atveju, nei jis iš tikrųjų turėtų būti taikomas pagal daromas energijos sklaidos prielaidas.

Apskritai, energijos išsisklaidymas priklauso nuo dalelių sąveikos istorijos. Kai kurie supaprastinimai gali būti atlikti ir energijos sklaidos istorijos poveikis gali būti ignoruojamas kvazistatinio supaprastinimo atveju, jei kontaktuojančių dalelių santykinis greitis yra daug mažesnis nei garso greitis medžiagoje. Tiesą sakant, iki šiol nėra visiškai aišku koks reiškinys kiek įtakos turi energijos sklaidai. Įvairius slopinimo modelius naudojamus DEM, jų palyginimus ir siūlomus patobulinimus galima rasti (Kruggel-Emden *et al.* 2007; Kruggel-Emden, Wirtz, ir Scherer 2009), tačiau šiuose straipsniuose pasiūlyti patobulinimai nėra universalūs. Toliau bus nagrinėjama tik slopinimo jėgos atsiradimas dėl klampiatamprių efektų.

Fizinių slopinimo procesų modeliavimas yra pagrįstas mechaniniais modeliais, kurių taikymui reikia žinoti dalelių medžiagų mechanines savybes, apibudinančias tampriąsias valkšniąsias ir plastines savybes. Tačiau šių savybių nustatymas yra sudėtingas ir daug darbo sąnaudų reikalaujantis procesas, nes literatūroje yra mažai slopinimo modeliavimui reikalingų duomenų arba jų iš viso nėra. Vietinio slopinimo skaičiavimas priklausomai nuo plastinių deformacijų yra vienas sudėtingiausių uždavinių plastiškumo teorijoje (Navarro ir de Souza Braun 2013; Nguyen ir Brogliato 2012; Schwager ir Pöschel 2007). Dėl šių priežasčių tikslus fizinių slopinimo procesų modeliavimas yra sudėtingas uždavinys, o praktinio taikymo atveju dažniausiai yra naudojamas normalinės sąveikos restitucijos koeficiento (RK) parametras ir jo taikymo metodikos. Šio koeficiento vertė nesunkiai nustatoma atliekant dalelių susidūrimo eksperimentą. Bendru požiūriu, RK yra sudėtinis parametras, apimantis klampiai-tampriai-plastinį slopinimą ir įvairius kitus veiksnius (Kačianauskas *et al.* 2003). Paprasčiausias normalinio kontakto slopinimo modelis, kai slopinimo jėga tiesiškai priklauso nuo dalelių persidengimo greičio ir slopinimo funkcijos, nepriklausančios nuo dalelių persidengimo bet priklausančios tik nuo RK, yra aptartas (Abd-Elhady *et al.* 2010; Gharib ir Hurmuzlu 2012; Sadd, Tai, ir Shukla 1993). Atsirandanti problema – restitucijos koeficientas gali priklausyti nuo pradinio kontakto greičio (Kharaz, Gorham, air Salman 2001; Labous, Rosato, ir Dave 1997; McNamara ir Falcon 2005; Seifried ir Hu 2003). Esami DEM slopinimo modeliais tik dalinai ir labai netiksliai įvertina restitucijos koeficiento priklausomybę nuo pradinio kontakto greičio (Jankowski 2006). Nėra tinkamos DEM metodikos kuri būtų tiksliai ir pakankamai parasta bei kuria būtų galima pakankamai tiksliai atsižvelgti į minėtą pradinio kontakto greičio įtaką restitucijos koeficiento kitimui. Todėl kita problema sprendžiama šitoje disertacijoje yra pasiūlyti slopinimo metodiką, kuria būtų galima tiksliau, nei taikant esamus DEM slopinimo modelius, įvertinti pradinio kontakto greičio ir restitucijos koeficiento priklausomybę.

Taikant DEM dalelių sistemų skaičiavimuose, restitucijos koeficientas (RK) naudojamas kaip medžiagos parametras apibūdinantis klampiatampri, nuo kontaktuojančių dalelių tarpusavio greičio priklausančią, slopinimą.

Bendruoju atveju jėgą atitinkančią klampiatamprę kontaktuojančių kūnų sąveiką galima išreikšti taip:

$$\mathbf{F}_{n,d,ij}(h_{c,ij}(t), dh_{ij}(t)/dt) = \mathbf{n}_{ij} C_{ij}(h_{ij}(t)) \frac{dh_{ij}(t)}{dt}, \quad (1.10)$$

čia $C_{ij}(h_{ij}(t))$ yra slopinimą normaline kryptimi apibūdinanti funkcija. Reikia pabrėžti, kad DEM slopinimą apibūdinanti funkcija $C_{ij}(h_{ij})$ nuo h_{ij} arba nepriklauso visai arba priklauso netiesiškai. Taip pat, (1.10) išraiška rodo, kad $\mathbf{F}_{d,n,ij}$ nuo persidengimo greičio $dh_{ij}(t)/dt$ priklauso tiesiškai.

1.8. Judėjimo lygtis

(1.1) formulėje vietoje $d\mathbf{x}(t)/dt$ įrašius $\mathbf{n}_{ij}dh_{ij}(t)/dt$, t. y. $d\mathbf{x}(t)/dt = \mathbf{n}_{ij}dh_{ij}(t)/dt$ ir į (1.1) formulę įrašius $\mathbf{F}_{el,n,ij}$ jėgos (1.6) ir slopinimo jėgos $\mathbf{F}_{d,n,ij}$ (1.10) išraiškas gaunama tokia dalelės judėjimo lygties išraiška:

$$\mathbf{n}_{ij}m_i \frac{d^2 h_{ij}(t)}{dt^2} + \mathbf{n}_{ij}C_{ij}(h(t)) \frac{dh_{ij}(t)}{dt} + \mathbf{n}_{ij}K_{n,ij}h_{ij}^{(1+\lambda)}(t) = 0, \quad (1.11)$$

čia ir toliau esančiame tekste pasvirusios neparyškintos raidės reiškia atitinkamo vektoriaus Euklidinę normą, pavyzdžiui, $F_{d,n,ij} = \|\mathbf{F}_{d,n,ij}\|$, $F_{el,n,ij} = \|\mathbf{F}_{el,n,ij}\|$, pagreitis, $a_i = \|\mathbf{a}_i\|$, greitis $v_i = \|\mathbf{v}_i\|$ ir t.t.

Toliau, paprastumo dėlei nagrinėjama (1.11) lygtis be vienetinio vektoriaus \mathbf{n}_{ij} . Todėl patogumo dėlei, žemiau esančiame tekste vektorinės jėgos, greičiai ir poslinkiai žymimi kaip skaliariai, t. y. daroma prielaida, kad dalelė kontaktuoja su paviršiumi turėdama tik vieną laisvės laipsnį. Taip pat patogumo dėlei netaikoma ij raidžių indeksuose: t. y. $h := h_{ij}$, $dh(t)/dt := dh_{ij}(t)/dt$, $d^2h(t)/dt^2 := d^2h_{ij}(t)/dt^2$, $C(h) := C_{ij}(h_{ij})$, $K_n := K_{n,ij}$, $F_{n,el} := F_{n,el,ij}$, čia $F_{n,el,ij} = \|\mathbf{F}_{n,el,ij}\|$, $F_n := F_{n,ij}$, čia $F_{n,ij} = \|\mathbf{F}_{n,ij}\|$, ir t. t. Tuomet (1.11) lygtį galima perrašyti taip:

$$m_i \frac{d^2 h(t)}{dt^2} + C(h(t)) \frac{dh(t)}{dt} + K_n h^{(1+\lambda)}(t) = 0. \quad (1.12)$$

Ši lygtis sprendžiama kai pradinės sąlygos kontakto pradžios laiko momentu t_0 yra tokios:

- pradinis persidengimas $h_0 = h(t_0) = 0$;
- pradinis kontakto greitis $w_0 = dh(t)/dt|_{t=t_0}$.

1.9. Esami klampiatamprės sąveikos modeliai

Klampiatamprios sąveikos normalinės jėgos (1.5) išraiškos $\mathbf{F}_n(h) = \mathbf{n}F_n(h) = \mathbf{n}F_{n,el}(h) + \mathbf{n}F_{n,d}(h)$ dedamosios $F_{n,el}(h)$ ir $F_{n,d}(h)$ yra tarpusavyje priklausomos. Todėl toliau jos nagrinėjamos kartu.

Kaip ir klasikinės klampiatamprios kietojo kūno mechanikos atveju DEM taikomus klampiatamprės sąveikos modelius galima suskirstyti į tiesinius ir netiesinius persidengimo h atžvilgiu. Imsime kad klampiatampris modelis tiesinis persidengimo $\mathbf{h} = \mathbf{n}h$ atžvilgiu, kai galioja tokios lygybės:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_n(\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2) = \mathbf{F}_n(\mathbf{h}_1) + \mathbf{F}_n(\mathbf{h}_2), \\ \mathbf{F}_n(\alpha \mathbf{h}) = \alpha \mathbf{F}_n(\mathbf{h}), \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.13)$$

čia \mathbf{F}_n traktuojama kaip vektorinio realaus kintamojo $\mathbf{h} \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^n$, t. y. persidengimo, vektorinė funkcija: $\mathbf{F}_n: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{X}^m$; čia n ir m priklauso nuo nagrinėjamo atvejo – trimatėje erdvėje $m, n = 3$, dvimatėje – $m, n = 3$, o vienmatės analizės atveju $\mathbb{S}, \mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ ir \mathbf{F}_n bei \mathbf{h} tampa skaliariais t. y. F_n ir h .

Derinant kartu abi (1.13) lygtis tiesiškumo sąlyga gali būti užrašyta taip:

$$\mathbf{F}_n(\alpha \mathbf{h}_1 + \alpha \mathbf{h}_2) = \alpha \mathbf{F}_n(\mathbf{h}_1) + \alpha \mathbf{F}_n(\mathbf{h}_2), \alpha \in \mathbb{R}. \quad (1.14)$$

Jeigu negalioja (1.13) arba (1.14) lygybės, tuomet klampiatamprės sąveikos modelis yra netiesinis. Čia reikia pabrėžti, kad pagal (1.10) lygybę slopinimo jėga $\mathbf{F}_{n,d}$ nuo persidengimo greičio $d\mathbf{h}_{ij}(t)/dt$ priklauso tik tiesiškai.

(1.13) ir (1.14) lygybės apima abi $\mathbf{F}_{n,el}(\mathbf{h})$ ir $\mathbf{F}_{n,d}(\mathbf{h})$ dedamąsias. Jeigu nors viena $\mathbf{F}_{n,el}(\mathbf{h})$ arba $\mathbf{F}_{n,d}(\mathbf{h})$ dedamoji yra netiesinė, tuomet ir bendra $\mathbf{F}_n(\mathbf{h})$ jėga yra netiesinė. Tačiau, gali būti, kad kokia nors viena $\mathbf{F}_{n,el}(\mathbf{h})$ arba $\mathbf{F}_{n,d}(\mathbf{h})$ dedamoji yra tiesinė, t. y. galioja sąlyga:

$$\mathbf{F}_{n,i}(\alpha \mathbf{h}_1 + \alpha \mathbf{h}_2) = \alpha \mathbf{F}_{n,i}(\mathbf{h}_1) + \alpha \mathbf{F}_{n,i}(\mathbf{h}_2), \alpha \in \mathbb{R}, i \in \{el, d\}. \quad (1.15)$$

Tuomet slopinimo modelis arba slopinimo jėga $\mathbf{F}_{n,d}(\mathbf{h})$ yra tiesinė (\mathbf{h} atžvilgiu) kai galioja (1.15) lygybė, kai $i = d$ ir netiesinė kai negalioja (1.15) lygybė. Taip pat priimama, kad tamprią sąveiką atitinkanti jėga $\mathbf{F}_{n,el}(\mathbf{h})$ yra tiesinė kai galioja (1.15) lygybė, kai $i = el$ ir netiesinė kai ši lygybė negalioja.

Visų esamų klampiatamprės sąveikos modelių $\mathbf{F}_n(\mathbf{h})$ jėga gali būti išreikšta bendra (1.5) formule. Skirsis tik skirtingų metodų $\mathbf{F}_{n,el}(\mathbf{h})$ arba $\mathbf{F}_{n,d}(\mathbf{h})$

dedamosios. Į (1.5) įrašius (1.6), (1.7) ir (1.10) išraiškas gauname tokią normalinės sąveikos jėgos formulę:

$$F_n(h) = \frac{4}{3} E_{eff} R_{eff,ij}^{(1-\lambda)} h^{(1+\lambda)} + C(h(t)) \frac{dh(t)}{dt}. \quad (1.16)$$

Šios lygties laipsnių rodikliai λ ir slopinimą apibūdinančios funkcijos $C(h)$ priklauso nuo esamų klampiatampės sąveikos modelių.

1.9.1. Tiesinės klampiatampės sąveikos modelis

Paprasčiausias bet labai populiarus tiesinio slopinimo modelis (LS) pagrįstas tiesine priklausomybe tarp slopinimo jėgos ir persidengimo greičio $dh(t)/dt$. Šio modelio slopinimo koeficientas C nepriklauso nei nuo persidengimo h nei nuo jo greičio $dh(t)/dt$. DEM tiesinis slopinimo modelis taikomas tik tada, kai Kelvino reologinio modelio spyruoklei (1.2 pav.) galioja Huko dėsnis, t. y. $F_{n,el} = K_n h$, t. y., kai (1.7) ir (1.12) formulių koeficientas $\lambda = 0$. Šio modelio sąveikos jėga yra tokia:

$$F_{LS}(h) = \frac{4}{3} E_{eff} R_{eff} h + C_{LS} \frac{dh(t)}{dt}. \quad (1.17)$$

Šios sąveikos slopinimą apibūdinanti funkcija nepriklauso nuo persidengimo h :

$$C_{LS} = c_{LS} \sqrt{m_{eff} K_n}, \quad (1.18)$$

čia K_n pateiktas (1.7) formulėje imant, kad $\lambda = 0$, o m_{eff} yra efektyvioji masė:

$$m_{eff} = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}, \quad (1.19)$$

o c_{LS} yra nedimensinis slopinimo koeficientas priklausančias nuo restitucijos koeficiento e :

$$c_{LS} = \frac{2 \ln(e)}{\sqrt{\ln^2(e) + \pi^2}}. \quad (1.20)$$

Reikia pažymėti, kad (1.18) ir (1.20) lygtys gautos tuomet kai (1.5) lygties jėgos $F_{n,el}(h) = K_n h$ ir $F_{n,d}(h) = C_{LS} dh(t)/dt$. Todėl (1.18) ir (1.20) išraiškos taikytinos tik tuomet kai $F_{n,el}(h) = K_n h$.

1.9.2. Lyo ir Hermano (Lee ir Hermann) sąveikos modelis

J. Li ir Hermanas (Lee ir Herrmann 1999) teigė, kad skaičiuojant energijos nuostolius svarbu atsižvelgti tik į prarastą energijos kiekį, o kitų normalinės sąveikos dydžių, tokių kaip persidengimo h , jo kitimo greičio $d(h)/dt$ ir kontakto jėgos F_n , paklaidos skaičiavimo eigoje kompensuojasi ir galutinio rezultato neįtakoja. Lyo ir Hermano (Lee ir Herrmann 1999) pateiktas slopinimo modelis (LH) tiesiškai priklauso tiksliai nuo kontaktuojančių dalelių greičių ir yra taikomas kai tamprią sąveiką atitinkanti $F_{n,el}$ jėga skaičiuojama pagal Herco dėsnį, t. y. kai (1.16) lygybės koeficientas $\lambda = 0,5$:

$$F_{LH}(h(t)) = \frac{4}{3} E_{eff} \sqrt{R_{eff,ij}} h^{1.5}(t) + C_{LH} \frac{dh(t)}{dt}. \quad (1.21)$$

Šios sąveikos slopinimo funkcija C_{LH} yra pastovus dydis viso dalelių kontakto metu, t. y. nepriklauso nuo persidengimo h .

1.9.3 Tsudžio (Tsuji) sąveikos modelis

Tsudžis ir kiti (Tsuji, Tanaka, ir Ishida 1992) remdamiesi Kundalo ir Strako (Cundall ir Strack 1979) slopinimo modeliu pasiūlė heuristinį netiesinį slopinimo modelį (TS) taikomą kartu su Herco $F_{el,n}$ jėga, t. y. kai (1.16) lygybės koeficientas $\lambda = 0,5$:

$$F_{TS}(h(t)) = \frac{4}{3} E_{eff} \sqrt{R_{eff,ij}} h^{1.5}(t) + C_{TS}(h(t)) \frac{dh(t)}{dt}. \quad (1.22)$$

Šio metodo $C_{TS}(h)$ slopinimo funkcija yra tokia:

$$C_{TS}(h(t)) = c_{TS} \sqrt{m_{eff} K_n h^{0.5}(t)}. \quad (1.23)$$

(1.23) lygties nedimensinis slopinimo koeficientas c_{TS} išraišką priklauso nuo RK e vieni pirmųjų pasiūlė Antypovas ir Eliotas (Antypov ir Elliott 2011):

$$c_{TS} = \frac{-\sqrt{5} \ln(e)}{\sqrt{\ln^2(e) + \pi^2}}. \quad (1.24)$$

1.9.4. Briliantovo (Brilliantov) sąveikos modelis

Dviejų identiškų dalelių netiesinį slopinimo modelį (BR) nepriklausomai pasiūlė Briliantovas (N. V. N. Brilliantov *et al.* 1996) ir Kuvabara (Kuwabara ir

Kono 1987). Slopavimo lygtis išvesta atsižvelgiant į deformacijas normaline ir tangentine kryptimis. Pagal šį metodą kontakto jėga yra tokia:

$$F_{BR}(h(t)) = \frac{4}{3} E_{eff} \sqrt{R_{eff,ij}} h^{1.5}(t) + C_{BR}(h(t)) \frac{dh(t)}{dt}, \quad (1.25)$$

čia slopinimo funkcija $C_{BR}(h)$ yra tokia:

$$C_{BR}(h(t)) = \frac{3}{2} A K_n h^{\frac{1}{3}}(t), \quad (1.26)$$

čia A yra slopinimo konstanta, kuri priklauso nuo medžiagos klampiųjų savybių:

$$A = \frac{1}{3} \frac{(3\eta_2 - \eta_1)^2 (1 - \mu)(1 - 2\mu)}{3\eta_2 + 2\eta_1 E\mu^2}. \quad (1.27)$$

(1.27) lygybės η_1 ir η_2 konstantos priklauso nuo medžiagos klampiųjų savybių, tačiau jų fizikinė prasmė ir kilmė Briliantovo (N. V. N. Brilliantov *et al.* 1996) straipsnyje nėra apibrėžtos. Kadangi η_1 ir η_2 gali būti bet kokie skaičiai tai A koeficientas apibrėžtas (1.27) formule nepakankamai, kitaip sakant (1.27) formulė yra mažai naudinga. $C_{BR}(h)$ slopinimo funkcijos ((1.26) lygtis) nežinomąjį A galima rasti pagal teorinio modelio skaičiavimo rezultatų tam tikro dydžio, pavyzdžiui RK ar kontakto trukmės ΔT , atitikimą eksperimento rezultatams. Remiantis nedimensine pagrindinės judėjimo lygties analize $C_{BR}(h)$ slopinimo funkcijos išraiška yra gauta 2.1 poskyryje.

1.9.5. Hu sąveikos modelis

Taikant ankščiau paminėtus slopinimo modelius gali būti taip, kad kontakto pradžioje ir pabaigoje, kai persidengimo greičio absoliutusias dydis $|dh(t)/dt|$ yra didelis gali pasireikšti dirbtiniai, t. y. fizikinio pagrindo neturintys reiškiniai kai $\|\mathbf{F}_{d,n,ij}\| > \|\mathbf{F}_{el,n,ij}\|$. Kontakto pradžioje $\mathbf{F}_{d,n,ij}$ ir $\mathbf{F}_{el,n,ij}$ kryptys sutampa, nes $dh(t)/dt > 0$, tuomet pagal (1.5) formulę $\|\mathbf{F}_{n,ij}\| = \|\mathbf{F}_{d,n,ij}\| + \|\mathbf{F}_{el,n,ij}\|$ todėl kai $\|\mathbf{F}_{d,n,ij}\| > \|\mathbf{F}_{el,n,ij}\|$ labai smarkiai padidėja stūmos jėga. Kontakto pabaigoje $\mathbf{F}_{d,n,ij}$ ir $\mathbf{F}_{el,n,ij}$ yra priešingų krypčių, t. y. $\mathbf{F}_{d,n,ij} = -\mathbf{F}_{el,n,ij}$ ir $\|\mathbf{F}_{n,ij}\| = \|(\|\mathbf{F}_{d,n,ij}\| - \|\mathbf{F}_{el,n,ij}\|)\|$. Todėl kai $\|\mathbf{F}_{d,n,ij}\| > \|\mathbf{F}_{el,n,ij}\|$ vietoje įprastos stūmos jėgos veikia fiziškai nepagrįsta traukos jėga dėl kurios pasireiškia į adheziją panašus reiškinys kai dalelės kontakto pabaigoje yra traukiamos viena prie kitos.

Aukščiau esančioje pastraipoje aprašyta problema gali būti sprendžiama imant, kad slopinimo jėga yra proporcinga Herco normalinio kontakto sprendinio jėgai $F_{el,n,ji} = K_{n,ij} h^{3/2}$ ir atvirkščiai proporcinga pradiniam kontakto greičiui v_0 . Šiuo atveju proporcingumo koeficientas yra nedimensinis slopinimo koeficientas c . Daug mokslininkų (Hu *et al.* 2011; Hu ir Gou 20105; Hunt ir

Crossley 1975; Wang, Wensrich, ir Ooi 2012) siūlė normalinės jėgos $\mathbf{F}_{n,ij}$ priklausomybės apibendrinti viena (1.16) formule kurios slopinimo funkcija $C_{HU}(h)$ yra tokia:

$$C_{HU}(h(t)) = \frac{c}{v_0} F_{n,el,ij} = \frac{c_{HU}}{v_0} K_{n,ij} h^{\frac{3}{2}}(t), \quad (1.28)$$

čia v_0 yra parametras galintis atitikti pradinį kontakto greitį. Bendruoju atveju (1.28) išraiškos $C_{HU}(h)$ funkcijos c slopinimo koeficientas priklauso nuo RK e ir nuo modelio. Tačiau, atliekant literatūros analizę esminių skirtumų tarp nedimensinių slopinimo koeficientų c nepastebėta, taip pat nustatyta, kad skirtingi slopinimo modeliai duoda panašius rezultatus, todėl tolesniuose skaičiavimuose buvo naudota Hu (Hu *et al.* 2011) pasiūlyta nedimensinio slopinimo koeficiento c išraiška (HU):

$$c_{HU} = \ln(e) \frac{6,66264}{3,85238 + \ln(e)}, \quad (1.29)$$

čia e yra RK reikšmė.

Taigi galutinai Hu (Hu *et al.* 2011) sąveikos jėga yra tokia:

$$F_{HU}(h(t)) = \frac{4}{3} E_{eff} \sqrt{R_{eff,ij}} h^{1.5}(t) + C_{HU}(h(t)) \frac{dh(t)}{dt}, \quad (1.30)$$

čia $C_{Hu}(h(t)) = c_{HU} K_n v_0^{-1} h^{\frac{3}{2}}(t)$.

1.10. Pirmojo skyriaus išvados ir disertacijos uždavinių formulavimas

1. Literatūroje galima rasti daugybę normalinio kontakto klampiatampraus slopinimo modelių, tačiau nerasta klampiatampraus slopinimo modelių analizės, parodančios esamų metodų privalumus ir trūkumus.
2. Tam tikri diskrečiųjų elementų metodo klampiatampraus slopinimo modeliai nėra iki galo pritaikyti praktiniam naudojimui, kadangi kai kurie slopinimo parametrai (*LH* ir *BR* modeliai) reikalingi skaičiavimams nėra apibrėžti. Todėl šių modelių taikymas diskrečiųjų elementų metodui reikalauja papildomos informacijos kurios rasti literatūroje nepavyko.

3. Dėl praktinių rekomendacijų trūkumo didelė klampiatampraus slopinimo modelių įvairovė apsunkina tinkamo klampiatampraus slopinimo modelio parinkimą. Todėl reikalingos konkrečios rekomendacijos leidžiančios parinkti tinkamą skaičiavimams klampiatampraus slopinimo modelį.
4. Praktiniam taikymui naudinga turėti bendrą esamų skirtingų slopinimo modelių išraišką. Deja, literatūroje nepavyko rasti diskrečiųjų elementų metode taikomų slopinimo modelių bendros išraiškos.
5. Literatūroje galima surasti slopinimo efekto aprašymų, ir siūlomų skaičiavimo metodikų, tačiau šių metodų taikymo ribos ir rezultatų priklausomybės nuo pasirenkamų skaičiavimo parametrų nėra iki galo išnagrinėtos. Norint įvertinti slopinimo modelio veikimo efektyvumą ir atitikimą eksperimentiniams rezultatams svarbu ištirti slopinimo modelių tarpusavio skirtumus, o taip pat ir modeliavimo rezultatų ir eksperimento skirtumus.

Apibendrinto slopinimo modelio kūrimas ir taikymas

Šiame skyriuje pasiūlyta dalelės judėjimo lygties nedimensinė išraiška leidžianti normalinės sąveikos skirtingus slopinimo modelius aprašyti viena bendra išraiška. Taikant pasiūlytą nedimensinę judėjimo lygtį palyginti keturi populiariausi ir dažniausiai naudojami normalinio kontakto klampiatamprės sąveikos modeliai.

Skirtingų slopinimo modelių analizė buvo atlikta skaičiuojant du dalelių sistemos atvejus: buvo tirtos dviejų kontaktuojančių dalelių kontakto jėgos, greičio ir poslinkių kitimas laike; jėgos bangų sklidimo greitis dalelių grandinėje. Skaičiavimų atvejai parinkti pagal literatūroje pateiktus eksperimentinius pavyzdžius, o gautieji skaičiavimo rezultatai palyginti su eksperimentiniais rezultatais. Analizuojant šiuos atvejus, galima nustatyti kaip dviejų kontaktuojančių dalelių skirtinga elgsena sąlygota skirtingų slopinimo modelių įtakoja dalelių grandinės elgseną kuri taip pat yra sąlygota tų pačių skirtingų slopinimo modelių. Dalelių grandinė, kaip tyrimo objektas pasirinkta todėl, kad grandinėje dalelės kontaktuoja tikrai normaline kryptimi, todėl jokios kitos sąveikos būdingos kitoms dalelių sistemoms t. y. tangentinė sąveika, trintis, riedėjimo sąveika ir riedėjimo trintis nepasireiškia ir dalelių grandinės elgsenos neįtakoja. Skyriuje pateikta medžiaga publikuota straipsniuose (Markauskas *et al.* 2015; Kačianauskas *et al.* 2016).

2.1. Nedimensinės analizės taikymas apibendrinto slopinimo modelio kūrimui

Judėjimo lygties nedimensinės išraiškos išvedimas pradedamas nuo (1.11) arba (1.12) judėjimo lygčių slopinimo funkcijos C bendros išraiškos sudarymo. Daugumos diskrečiųjų elementų metodo (1.11) arba (1.12) lygčių slopinimo funkcija C priklauso nuo nedimensinio slopinimo koeficiento c , kuris priklauso nuo RK e ; efektyviosios masės m_{eff} ; normalinio kontakto standumo koeficiento K_n ; parametro v_0 ir dalelių persidengimo $h(t)$ kintančio viso kontakto metu:

$$C(h) = f(c, h, m_{eff}, K_n, v_0). \quad (2.1)$$

Išanalizavus tiriamus klampiatampraus slopinimo modelius nustatyta, kad šie modeliai gali būti apibendrinti vieninga slopinimą apibūdinančia funkcija C :

$$C(e(v_0)) = c(e(v_0)) m_{eff}^{\alpha_1} K_n^{\alpha_2} v_0^{\alpha_3} (h(t))^\beta = \gamma (h(t))^\beta, \quad (2.2)$$

čia $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ir β esti laipsnio rodikliai priklausantys nuo slopinimo modelio. γ yra slopinimo konstanta:

$$\gamma = c(e(v_0)) m_{eff}^{\alpha_1} K_n^{\alpha_2} v_0^{\alpha_3}, \quad (2.3)$$

čia $c(e(v_0))$ – nedimensinis slopinimo koeficientas priklausanti nuo RK e , kuris savo ruožtu priklauso nuo parametro v_0 . $c(e(v_0))$ nustatymas pateiktas 2.1 poskyryje.

Dabar sudaroma nedimensinė lygti. Toliau pateiktas nedimensinės lygties sudarymas. Judėjimo lygties nedimensinę išraišką ir jos išvedimą galima rasti Tsudži (Tsuji, Tanaka, ir Ishida 1992) ir Briliantovas (N. V. N. Brilliantov *et al.* 1996).

Įrašius į (1.12) lygtį $\lambda = 0,5$ ir (2.2) formulėje duotą $C(e(v_0))$ išraišką gaunama tokia dalelės svorio ir geometrinio centro judėjimo lygtis kontakto metu:

$$\frac{d^2 h(t)}{dt^2} m_i + \gamma h^\beta(t) \frac{dh(t)}{dt} + K_n h^{\frac{3}{2}}(t) = 0, \quad (2.4)$$

čia γ paaiškinta (2.2) formulėje, m_{eff} yra efektyvioji masė pateikta (1.19), K_n yra Herco normalinio kontakto konstanta pateikta (1.7) formulėje imant $\lambda = 0,5$.

(2.4) lygties persidengimą $h(t)$ ir jo išvestines $dh(t)/dt$ ir $d^2h(t)/dt^2$ pakiama nedimensinių funkcijų sandaugomis su atitinkamais dydžiais:

$$h(t) = H \bar{h}(\bar{t}), \quad (2.5)$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = v_0 \frac{d\bar{h}(\bar{t})}{d\bar{t}}, \quad (2.6)$$

$$\frac{d^2 h(t)}{dt^2} = \frac{v_0^2}{H} \frac{d^2 \bar{h}(\bar{t})}{d\bar{t}^2}, \quad (2.7)$$

čia $d\bar{h}(\bar{t})$ esti nedimensinis persidengimas, $d\bar{h}(\bar{t})/d\bar{t}$ ir $d^2\bar{h}(\bar{t})/d\bar{t}^2$ gali būti traktuojami kaip nedimensinis persidengimo greitis ir pagreitis atitinkamai, \bar{t} turi būti traktuojamas kaip nedimensinis laikas, v_0 – parametras, o H yra didžiausias persidengimas pagal Hercą:

$$H = \left(\frac{5m_{\text{eff}} v_0^2}{4K_n} \right)^{\frac{2}{5}}. \quad (2.8)$$

Panaudojus (2.5), (2.6) ir (2.7) formules (2.4) lygtįje gaunama:

$$\frac{d^2 \bar{h}(\bar{t})}{d\bar{t}^2} \frac{m_i v_0^2}{H} + \gamma H^\beta v_0 \bar{h}^\beta(\bar{t}) \frac{d\bar{h}(\bar{t})}{d\bar{t}} + K_n H^{\frac{3}{2}} \bar{h}^{\frac{3}{2}}(\bar{t}) = 0, \quad (2.9)$$

čia $\bar{h}^\beta(\bar{t}) \equiv (\bar{h}(\bar{t}))^\beta$ ir $\bar{h}^{3/2}(\bar{t}) \equiv (\bar{h}(\bar{t}))^{3/2}$ esti nedimensinio persidengimo funkcijos. Padauginus (2.9) lygtį iš $H/(m_{\text{eff}} v_0^2)$ gauname:

$$\frac{d^2 \bar{h}(\bar{t})}{d\bar{t}^2} \frac{m_i}{m_{\text{eff}}} + \gamma \frac{H^{\beta+1}}{v_0 m_{\text{eff}}} \bar{h}^\beta(\bar{t}) \frac{d\bar{h}(\bar{t})}{d\bar{t}} + \frac{K_n H^{5/2}}{v_0 m_{\text{eff}}} \bar{h}^{\frac{3}{2}}(\bar{t}) = 0, \quad (2.10)$$

Išrašius H (2.8) išraišką į (2.10) ir sutraukus panašius narius gauname:

$$\frac{d^2 \bar{h}(\bar{t})}{d\bar{t}^2} \frac{m_i}{m_{\text{eff}}} + \gamma \omega \left(\frac{5}{4} \right)^{\frac{2}{5}(\beta+1)} \bar{h}^\beta(\bar{t}) \frac{d\bar{h}(\bar{t})}{d\bar{t}} + \frac{5}{4} \bar{h}(\bar{t})^{\frac{3}{2}} = 0, \quad (2.11)$$

čia ω

$$\omega = m_{\text{eff}}^{\left(\frac{2\beta-3}{5}\right)} v_0^{\left(\frac{4\beta-1}{5}\right)} K_n^{\frac{2}{5}(\beta+1)}. \quad (2.12)$$

(2.2) formulės koeficientas c buvo neapibrėžta. Priimama, kad (2.2) formulės $c(e(v_0)) = \gamma\omega$, tuomet iš (2.3) formulės $c(e(v_0)) = \gamma/(m_{\text{eff}}^{\alpha_1} K_n^{\alpha_2} v_0^{\alpha_3})$ tačiau pagal mūsų prielaidą $c(e(v_0)) = \gamma\omega$. Todėl:

$$c(e(v_0)) = \frac{\gamma}{m_{\text{eff}}^{\alpha_1} v_0^{\alpha_2} K_n^{\alpha_3}} = \gamma\omega = \gamma m_{\text{eff}}^{\left(\frac{2\beta-3}{5}\right)} v_0^{\left(\frac{4\beta-1}{5}\right)} K_n^{\frac{2}{5}(\beta+1)}. \quad (2.13)$$

Padalinus (2.13) iš γ gauname:

$$\frac{1}{m_{eff}^{\alpha_1} v_0^{\alpha_2} K_n^{\alpha_3}} = \omega = m_{eff}^{\left(\frac{2\beta-3}{5}\right)} v_0^{\left(\frac{4\beta-1}{5}\right)} K_n^{-\frac{2}{5}(\beta+1)}. \quad (2.14)$$

(2.14) lygtis rodo, kad (2.2) formulės laipsniai α_1 , α_2 ir α_3 gali būti tokie:

$$\alpha_1 = \frac{3-2\beta}{5}, \quad \alpha_2 = \frac{1-4\beta}{5}, \quad \alpha_3 = \frac{2}{5}(\beta+1). \quad (2.15)$$

Įrašius α_1 , α_2 ir α_3 į (2.2) gauname tokią slopinimą apibūdinančios funkcijos išraišką:

$$C(e(v_0)) = c(e(v_0)) m_{eff}^{(3-2\beta)/5} v_0^{(1-4\beta)/5} K_n^{(2+2\beta)/5} h^\beta(t). \quad (2.16)$$

Nors yra trys α_1 , α_2 ir α_3 laipsniai t. y. trys nežinomieji tačiau yra tik viena (2.14) lygtis kurią šie laipsniai turi atitikti. Todėl formaliai, arba matematiškai (2.14) lygtį gali atitikti be galo daug $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ aibių. Šiame darbe parinkama akivaizdžiausios galimos α_1 , α_2 ir α_3 laipsnių reikšmės. Tačiau, kaip jau minėta, galimos ir kitos α_1 , α_2 ir α_3 laipsnių reikšmės. Tuomet kitokias α_1 , α_2 ir α_3 laipsnių reikšmės atitiks kitokia slopinimą apibūdinančios funkcijos $C(h)$ išraiška nei pateikta (2.16) formulėje.

Į (2.3) įrašius (2.15) formulės α_1 , α_2 ir α_3 reikšmes gaunama γ koeficiento išraiška:

$$\gamma = c(e(v_0)) m_{eff}^{\alpha_1} K_n^{\alpha_2} v_0^{\alpha_3} = c(e(v_0)) m_{eff}^{\left(\frac{2\beta-3}{5}\right)} v_0^{\left(\frac{4\beta-1}{5}\right)} K_n^{-\frac{2}{5}(\beta+1)}. \quad (2.17)$$

Kadangi pagal priimtą prielaidą $c = \gamma\omega$ tuomet įrašome šią išraišką į (2.11) lygtį, galutinė nedimensinės diferencialinės (2.11) lygties išraiška yra tokia:

$$\frac{d^2 \bar{h}(\bar{t})}{d\bar{t}^2} \frac{m_i}{m_{eff}} + \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{2}{5}(\beta+1)} c(e(v_0)) \bar{h}^\beta(\bar{t}) \frac{d\bar{h}(\bar{t})}{d\bar{t}} + \frac{5}{4} \bar{h}(\bar{t})^{\frac{3}{2}} = 0. \quad (2.18)$$

Ši lygtis sprendžiama kai pradinės sąlygos kontakto pradžios nedimensinio laiko momentu \bar{t}_0 yra tokios:

- pradinis persidengimas $\bar{h}_0 = \bar{h}(\bar{t}_0) = 0$;
- pradinis kontakto greitis $\bar{w}_0 = d\bar{h}(\bar{t})/d\bar{t}|_{\bar{t}=\bar{t}_0}$.

Gautos (2.18) lygties nariai gali būti apibūdinti taip:

$$\frac{d^2 \bar{h}(\bar{t})}{d\bar{t}^2} \frac{m_i}{m_{eff}} - \text{nedimensinė inercijos jėga,}$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{2}{5}(\beta+1)} c \bar{h}^\beta(\bar{t}) \frac{d\bar{h}(\bar{t})}{d\bar{t}} = \bar{F}_d(\bar{h}) - \text{nedimensinė slopinimo jėga,} \quad (2.19)$$

$$\frac{5}{4}\bar{h}(\bar{t})^2 - \text{nedimensinė tamprios sąveikos jėga.}$$

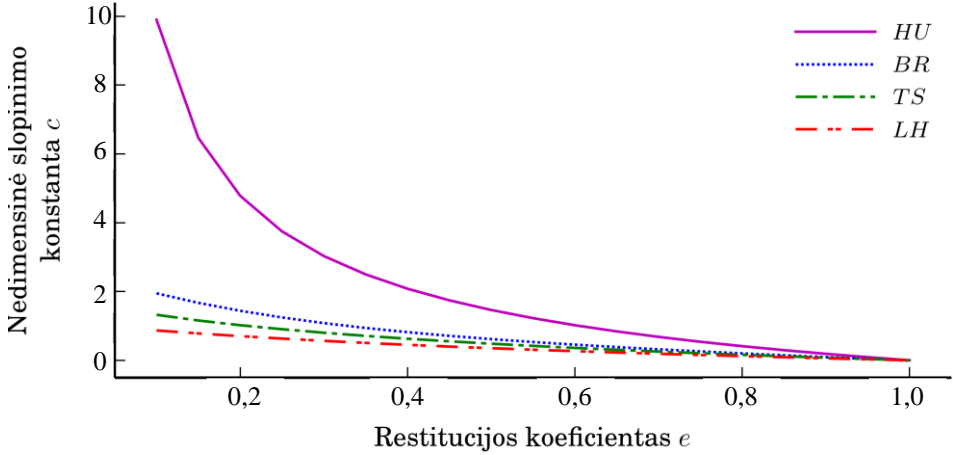
Toliau tekste imama, kad $c \equiv c(e(v_0))$ ir $C \equiv C(e(v_0))$. Tačiau formulėse, didesniai aiškumui, paliekami $C(e(v_0))$ ir $c(e(v_0))$ žymenys.

2.2. Slopavimo funkcijos nedimensinių slopinimo koeficientų apskaičiavimas

Restitucijos koeficientas priklauso ne tik nuo sąveikaujančių kūnų fizikinių ir mechaninių savybių, bet ir nuo pradinio kontakto greičio. c_{LS} ir c_{TS} koeficientų išraiškos duotos (1.20) ir (1.24) formulėse. Iš šių formulių matyti, kad c_{LS} ir c_{TS} priklauso tik nuo RK e . Kitų LH , BR ir HU slopinimo modelių c slopinimo koeficientai nėra pateikti ir juos reikia nustatyti. Pagal šių modelių slopinimo funkcijų C išraiškas, LH (1.21) formulė, BR (1.26) formulė ir HU (1.30) formulė, C slopinimo funkcijos priklauso nuo parametro v_0 . Todėl šių metodų nedimensiniai slopinimo koeficientai c_i , $i \in \{LH, BR, HU\}$ taip pat priklausys nuo pradinio kontakto arba parametro v_0 . Reikia pabrėžti, kad c_i , $i \in \{LH, BR, HU\}$ koeficientai gali būti nustatyti įvairiai. Vienas iš galimų metodų – taip aproksimuoti c_i koeficientus, kad sumodeliuotų dviejų sąveikaujančių kūnų kontaktą apibūdinantys dydžiai, tokie kaip RK e , kontakto trukmė ΔT , energijos nuostoliai, kontakto jėga F_n , ir t. t. atitiktų eksperimentiškai nustatytus atitinkamus kontakto parametrus. Problema tokia, kad DEM taikomi slopinimo metodai dėl labai didelių skaičiavimo sąnaudų yra labai supaprastinti ir tikrovėje galima parinkti tik tokius c_i koeficientus, kad modeliavimo rezultatai atitiktų vieną kurį nors eksperimentiškai nustatytą kontakto parametą, pavyzdžiui RK. Kitu atveju reikėtų taikyti daugiakriterijinius optimizavimo metodus kas dar labiau komplikuočių skaičiavimus.

c_{LS} ir c_{TS} priklauso nuo RK e , taigi šių slopinimo modelių c_{LS} ir c_{TS} koeficientai parinkti taip, kad atitiktų restitucijos koeficiento reikšmę e . Todėl likusieji c_i , $i \in \{LH, BR, HU\}$ koeficientai taip pat yra aproksimuoti nuo RK e . Kaip jau minėta C_i , $i \in \{LH, BR, HU\}$ priklauso ir nuo v_0 . Todėl c_i taip pat turi priklausyti nuo pradinio kontakto greičio v_0 . Pagal (2.6) formulę nedimensinės (2.18) lygties nedimensinis persidengimo greitis $d\bar{h}(\bar{t})/d\bar{t} = dh(t)/dt/v_0$. Todėl aproksimuojant c_i kontakto pradžioje, t. y. kai $t = t_0$ visuomet $d\bar{h}(\bar{t})/d\bar{t}|_{\bar{t}=0} = 1$. Pagal užduotą RK e išspręsti atvirkštinį (2.18) nedimensinės lygties uždavinį yra sudėtinga. Todėl c_i , $i \in \{LH, BR, HU\}$ koeficientų priklausomybė nuo RK e buvo nustatyta kitaip. Buvo užsiduotos c_i reikšmės ir skaitiškai išsprendus nedimensinę (2.18) lygtį gauta c_i atitinkanti RK e reikšmė, t. y. buvo ieškomas

atvaizdis $M : c_i \mapsto e$, $e \in [0,1, 1,0]$, $i \in \{LH, BR, HU\}$. c_{LS} , c_{TS} , c_{LH} , c_{BR} ir c_{HU} koeficientų priklausomybės nuo RK e yra pavaizduotos 2.1 paveiksle.



2.1 pav. c_{LS} , c_{TS} , c_{LH} , c_{BR} ir c_{HU} koeficientų priklausomybės nuo restitucijos koeficiento $e \in [0,1, 1,0]$

Fig. 2.1. The dependence of the coefficients c_{LS} , c_{TS} , c_{LH} , c_{BR} ir c_{HU} on restitution coefficient $e \in [0,1, 1,0]$

c_{LS} , c_{TS} ir c_{HU} nedimensiniai slopinimo koeficientai priklausomai nuo RK e yra pateikti atitinkamai (1.20), (1.24) ir (1.29) formulėse, o c_{LH} ir c_{BR} nedimensinių slopinimo koeficientų aproksimacijos nuo RK e yra duotos (2.21) ir (2.22) formulėse atitinkamai:

$$\hat{c}_{LH}(e(v_0)) = 0,4023 - 0,449e(v_0) + 0,6659\exp(-2,7e(v_0)), \quad (2.20)$$

$$\hat{c}_{BR}(e(v_0)) = 0,8444 - 0,877e(v_0) + 1,835\exp(-4,344e(v_0)), \quad (2.21)$$

čia $\exp(\cdot) \equiv 2,7182818284\dots^{(v)}$ – eksponentės funkcija, pavyzdžiui $\exp(x) \equiv 2,7182818284\dots^{(v)}$.

Skirtingų slopinimo modelių, LS (1.18) – (1.20) formulės, LH (1.21) formulė, TS (1.23) ir (1.24) formulės, BR (1.26) formulė ir HU (1.28) ir (1.29) formulės, laipsnio rodikliai β ir slopinimo funkcijos C duotos 2.1 lentelėje. Šios formulės, išskyrus tiesinį arba LS metodą, gautos į bendrą (2.16) formulę įrašius laipsnio rodiklio β reikšmę.

2.1 lentelė. Slopinimo funkcijos ir nedimensinio slopinimo koeficiento išraiškos

Table 2.1. The expressions of damping function and nondimensional coefficient

Klapiatampraus slopinimo modelio žymuo	Koeficiento β reikšmės	Slopinimo funkcijos $C(h)$ išraiška
LS	0	$C_{LS} = c_{LS}(e) K_n^{0,5} m_{eff}^{0,5}$ $c_{LS} = 2\ln(e) / \sqrt{\ln^2(e) + \pi^2}$
TS	0,25	$C_{TS}(h) = c_{TS}(e) m_{eff}^{0,5} K_n^{0,5} h^{0,25}$ $c_{TS} = -\sqrt{5}\ln(e) / \sqrt{\ln^2(e) + \pi^2}$
LH	0	$C_{LH} = c_{LH}(e) m_{eff}^{3/5} v_0^{0,2} K_n^{0,4}$ $\hat{c}_{LH} = 0,4023 - 0,449e + 0,6659\exp(-2,7e)$
BR	0,5	$C_{BR}(h) = c_{BR}(e) m_{eff}^{0,4} v_0^{-0,2} K_n^{3/5} h^{0,5}$ $\hat{c}_{BR} = 0,8444 - 0,877e + 1,835\exp(-4,344e)$
HU	3/2	$C_{HU}(h) = c_{HU}(e) v_0^{-1} K_n h^{3/2}$ $c_{HU} = 6,663\ln(e) / (3,853 + \ln(e))$

Slopinimo funkcijų C išraiškos pateiktos 2.1 lentelėje atitinka (1.18), (1.23) ir (1.28) (LS , TS , HU) formules randamas literatūroje arba duoda vienodus rezultatus lyginant su (1.21) ir (1.26) (LH , BR) formulėmis.

2.3. Nedimensinės kontakto jėgos analizė

2.1 poskyryje buvo parodyta, kad skirtingų modelių nedimensiniai slopinimo koeficientai gali būti išreikštos viena (2.16) formule, kurios konkrečios tam tikro modelio išraiškos duotos 2.1 lentelėje. Šiame poskyryje analizuojami dviejų dalelių kontakto parametrai, kontakto trukmė, persidengimas, kontakto jėga, nustatomi taikant įvairius slopinimo modelio.

Dalelei kontaktuojant su vienu objektu vyksta tik vienas kontaktas. Tuomet kontakto jėga lygi dalelės inercijos jėgai, kuri susideda iš slopinimo ir tampos dedamųjų (1.16). Sprendžiant lygtį (2.18) ši jėga gali būti susieta su nedimensiniu pagreičiu. Jeigu priimama, kad $m_{eff} = 1$, tuomet:

$$\bar{a}(\bar{t}) = \bar{F}_n(\bar{t}) = \frac{d^2 \bar{h}(\bar{t})}{d\bar{t}^2}. \quad (2.22)$$

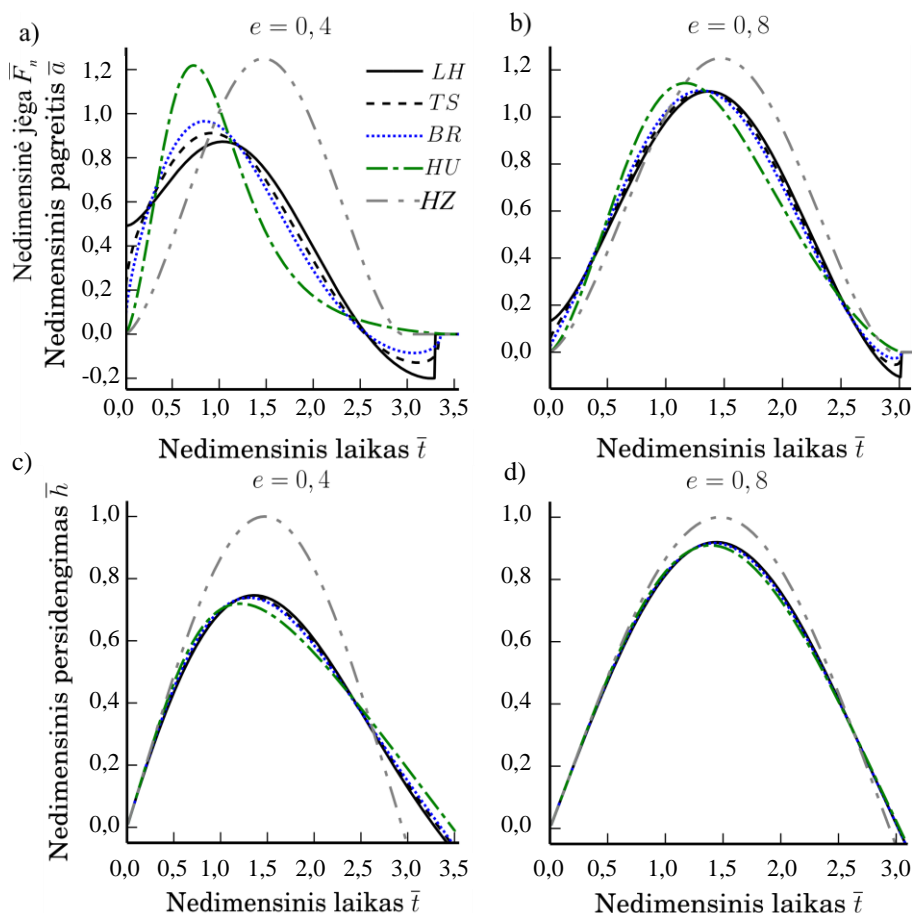
Grįžti atgal į dimensinę formą galima atsižvelgiant į nedimensinio pagreičio išraišką (2.7), tuomet dimensinė normalinė jėga:

$$F_n(t) = m_{\text{eff}} \frac{v_0^2}{H} \bar{F}_n(\bar{t}) = m_{\text{eff}} \frac{v_0^2}{H} \frac{d^2 \bar{h}(\bar{t})}{d\bar{t}^2}. \quad (2.23)$$

Tiesinių LS ir LH modelių $F_{n,d}$ nepriklauso nuo persidengimo h (2.1 lentelė) todėl $F_{n,d} \rightarrow 0$ kai $h \rightarrow 0$ ir $w_0 \neq 0$. Todėl kai w_0 didelis pačioje kontakto pradžioje gali atsirasti didelės $F_{n,d}$ stūmos jėgos. Kitų modelių, t. y. BR , TS , HU (2.1 lentelė), $F_{n,d}$ nuo persidengimo h priklauso taip kad $F_{n,d} \rightarrow 0$ kai $h \rightarrow 0$ ir $w_0 \neq 0$. Tai akivaizdžiai matyti iš 2.1 lentelėje duotų $C_i(h)$, $i \in \{BR, TS, HU\}$ formulių. Šie samprotavimai taip pat iliustruoti 2.2 paveiksle, kur pateikta nedimensinių normalinių jėgų $\bar{F}_{n,i}$, nedimensinių pagreičių, \bar{a}_i , čia $\bar{a}_i(\bar{t}) = d^2 \bar{h}_i(\bar{t}) / d\bar{t}^2$, ir nedimensinių persidengimų \bar{h}_i , $i, j \in \{LH, BR, TS, HU, HZ\}$ kitimas kontakto metu, kai $RK \in \{0,4, 0,8\}$. Pabrėšime, kad $\bar{F}_{n,HZ}$, \bar{a}_{HZ} ir \bar{h}_{HZ} paskaičiuoti taikant Herco dėsnį nuo RK nepriklauso.

2.2 paveiksle \bar{h}_{HZ} ir $\bar{F}_{n,HZ}$ bei \bar{a}_{HZ} maksimumai susidaro tuo pačiu nedimensiniu laiko momentu kai $\bar{t} = \bar{t}^*$ t. y. $\max\{\bar{F}_{n,HZ}(\bar{t}): \bar{t} \in [0, \Delta\bar{T}]\} = \bar{F}_{n,HZ}(\bar{t}^*)$ ir $\max\{\bar{h}_{n,HZ}(\bar{t}): \bar{t} \in [0, \Delta\bar{T}]\} = \bar{h}_{n,HZ}(\bar{t}^*)$. Kitų slopinimo modelių \bar{h}_i ir $\bar{F}_{n,i}$ bei \bar{a}_i , $i \in \{LH, BR, TS, HU\}$ maksimumai $\max\{\bar{F}_{n,i}(\bar{t}): \bar{t} \in [0, \Delta\bar{T}]\}$, tuo pačiu $\max\{\bar{a}_{n,i}(\bar{t}): \bar{t} \in [0, \Delta\bar{T}]\}$ ir $\max\{\bar{h}_{n,i}(\bar{t}): \bar{t} \in [0, \Delta\bar{T}]\}$ susidaro skirtingais nedimensinio laiko \bar{t} momentais. Tai akivaizdžiai matyti iš 2.2 a) paveikslo, pavyzdžiui $\bar{F}_{n,HU}(\bar{t})$ ir $\bar{h}_{n,HU}(\bar{t})$ maksimumus įgyja skirtinguose \bar{t} .

Kontaktuojančioms dalelėms artėjant vienai prie kitos normalinės sąveikos jėga \bar{F}_n didėja todėl ir nedimensinis pagreitis \bar{a} didėja. Kai dalelės tolsta viena nuo kitos \bar{F}_n ir \bar{a} mažėja. Trukmė, kai \bar{F}_n ir \bar{a} didėja vadinama suartėjimo trukme ir žymima $\Delta\bar{T}_{app}$. Iš 2.2 paveikslo matyti, kad didžiausias nedimensinio pagreičio $\bar{a}_{max,i} = \max\{\bar{a}_i(\bar{t}): \bar{t} \in [0, \Delta\bar{T}]\}$, čia $i \in \{HU, BR, TS, LH, HZ\}$, $\Delta\bar{T}$ – nedimensinė kontakto trukmė, (tuo pačiu pagal (2.22) formulę ir didžiausios normalinės jėgos $\bar{F}_{max,i} = \max\{\bar{F}_i(\bar{t}): \bar{t} \in [0, \Delta\bar{T}]\}$) reikšmės dalelių suartėjimo pabaigoje įgyja tie modeliai, kurių (2.18) lygties eksponentės β yra didžiausios. Kai restitucijos koeficientas $e = 0,8$ yra santykinai didelis, skirtumai $|\bar{a}_{max,i} - \bar{a}_{max,j}|$, čia $i, j \in \{HU, BR, TS, LH\}$, $i \neq j$, yra santykinai nedideli, žiūrėti paveikslą 2.2 a).



2.2 pav. Nedimensinės normalinės jėgos $\bar{F}_{n,i}$, pagreičio \bar{a} ir persidengimo \bar{h} kitimas kontakto metu: a) ir c) kai restitucijos koeficientas $e = 0,8$; b) ir d) kai restitucijos koeficientas $e = 0,4$

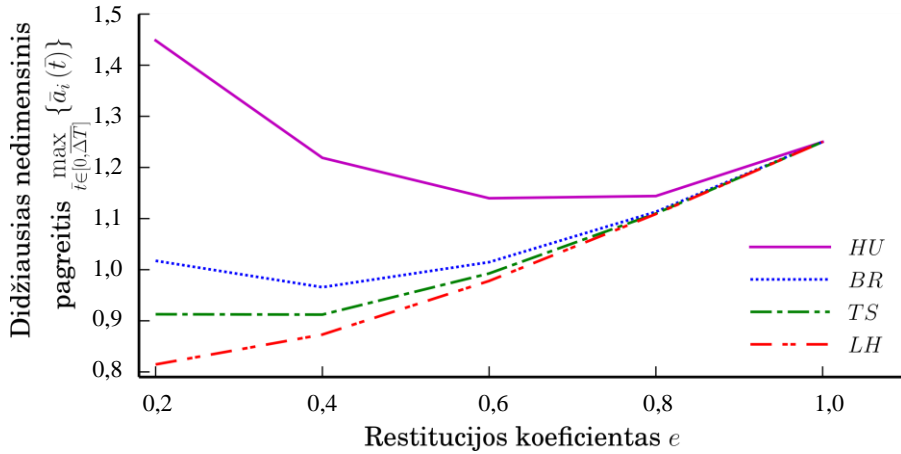
Fig. 2.2. Variation of nondimensional normal force $\bar{F}_{n,i}$, axeleration \bar{a} and overlap \bar{h} during the contact: a) and c) when restitution coefficient $e = 0.8$; b) and d) when restitution coefficient $e = 0.4$

Šiuo atveju nedimensinio pagreičio normaline kryptimi didžiausios reikšmės svyruoja nuo $\min\{\bar{a}_{max,i}: i \in \mathbb{M}\} = \bar{a}_{max,LH} = 0,98$ iki $\max\{\bar{a}_{max,i}: i \in \mathbb{M}\} = \bar{a}_{max,HU} = 1,14$, čia $\mathbb{M} \in \{HU, BR, TS, LH\}$. Palyginimui, Herco sprendinio $\bar{a}_{max,HZ} = 1,25$. Didžiausias skirtumas $\max\{\bar{a}_{max,i}: i \in \mathbb{M}\} - \min\{\bar{a}_{max,i}: i \in \mathbb{M}\} = 0,16$. Sumažinus RK iki $e = 0,4$ skirtumai $|\bar{a}_{max,i}| - |\bar{a}_{max,j}|$, $i, j \in \{HU, BR, TS, LH\}$, $i \neq j$, padidėja (2.2 b) pav.), pavyzdžiui $\max\{\bar{a}_{max,i}$:

$i \in \mathbb{M}\} - \min\{\bar{a}_{\max,i}: i \in \mathbb{M}\} = 0,35$, čia $\max\{\bar{a}_{\max,i}: i \in \mathbb{M}\} = \bar{a}_{\max,HU} = 1,22$, $\min\{\bar{a}_{\max,i}: i \in \mathbb{M}\} = \bar{a}_{\max,LH} = 0,87$.

Iš 2.2 paveikslo matyti, kad išskyrus \bar{h}_{HZ} , nedimensinis persidengimas h nedaug priklauso nuo slopinimo modelio ir RK e . Taip pat matyti, kad didžiausias persidengimas gaunamas taikant Herco kontaktą be slopinimo: $\max\{\bar{h}_{\max,i}: i \in \mathbb{M}\} = \bar{h}_{\max,HZ}$, čia $\bar{h}_{\max,i} = \max\{\bar{h}_i(\bar{t}): \bar{t} \in [0, \Delta\bar{T}]\}$, $i \in \{HU, BR, TS, LH\}$.

Nedimensinio pagreičio \bar{a}_i , maksimumų $\max\{\bar{a}_i(\bar{t}): \bar{t} \in [0, \Delta\bar{T}]\}$, $i \in \{HU, BR, TS, LH\}$ priklausomybės nuo RK e pavaizduotos 2.3 paveiksle. Šio paveikslo kreivės rodo, kad mažėjant RK skirtumai $|\bar{a}_{\max,i}| - |\bar{a}_{\max,j}|$, čia $i, j \in \{HU, BR, TS, LH\}$, $i \neq j$, didėja. Taip pat nustatyta, kad BR maksimumas $\max\{\bar{a}_{BR}(\bar{t}): \bar{t} \in [0, \Delta\bar{T}]\}$, vadinasi ir $\max\{\bar{F}_{n,BR}(\bar{t}): \bar{t} \in [0, \Delta\bar{T}]\}$ mažėja mažėjant RK, tačiau tai negalioja kitiems modeliams.



2.3 pav. Didžiausio nedimensinio pagreičio $\max\{\bar{a}_i(\bar{t}): \bar{t} \in [0, \Delta\bar{T}]\}$ priklausomybės nuo restitucijos koeficiento e

Fig. 2.3. Dependences of maximum nondimensional acceleration $\max\{\bar{a}_i(\bar{t}): \bar{t} \in [0, \Delta\bar{T}]\}$ on the restitution coefficient e

Eksponentė β įtakoja ne tik kontakto jėgą F_n , bet ir kontakto periodą. Nustatyta, kad didėjant β kinta suspaudimo ir atsipalaidavimo fazių trukmių santykis, taip pat pailgėja ir kontakto periodas. Skirtingi suspaudimo ir atsipalaidavimo fazių santykiai atsiranda dėl skirtingo kontakto greičio $d\bar{h}(\bar{t})/d\bar{t}$ kuris gali būti siejamas su persidengimo aukščio \bar{h} kitimu.

Didesni $\max\{|\bar{h}_{\max,i} - \bar{h}_{\max,j}|\}$ skirtumai, čia $\bar{h}_{\max,i} = \max\{\bar{h}_i(\bar{t}): \bar{t} \in [0, \Delta\bar{T}]\}$, $\mathbb{M} \in \{HU, BR, TS, LH\}$, atsiranda taikant santykinai labai mažas RK e , o su

vidutinėms ir didesnėms RK e šie skirtumai mažėja. Nustatyta, kad kai RK $e \rightarrow 1$ tuomet $\bar{h}_i \rightarrow \bar{h}_{HZ}$, $i \in \{HU, BR, TS, LH, LS\}$.

2.4. Dviejų dalelių kontaktas

Dviejų dalelių sąveikos modeliavimo metu buvo tiriamos kontakto makro parametrų, tokių kaip restitucijos koeficientas ir kontakto laikas, priklausomybės nuo pradinio kontakto greičio. Taip pat atliktas mikro parametrų palyginimas: kontakto jėgos, persidengimo aukščio ir jo kitimo greičio priklausomybės nuo laiko naudojant skirtingus slopinimo jėgos modelius.

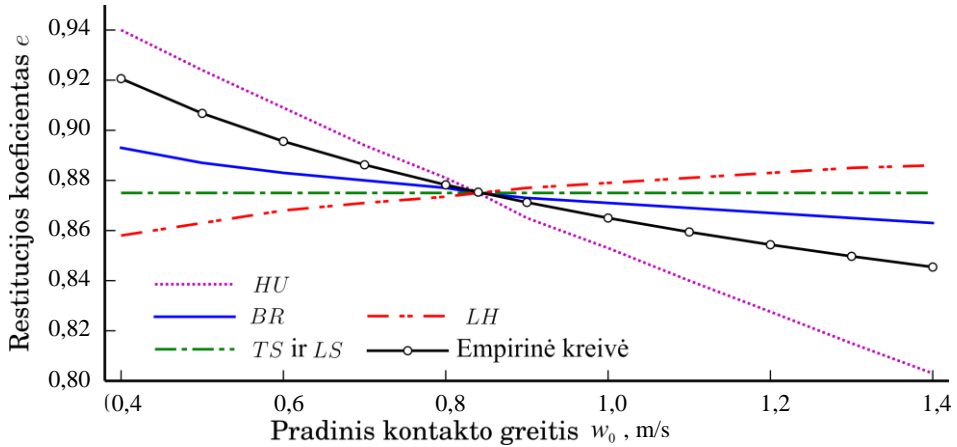
Stevensas ir Hrenija (Stevens ir Hrenya 2005) tyrė dvi plienines, pagal švytuoklės dėsnį judančias ir kontaktuojančias daleles. Čia galima rasti atliktą restitucijos koeficiento ir pradinio kontakto greičio priklausomybės tyrimą. Remiantis minėtu eksperimentu, atliktas eksperimentinių rezultatų palyginimas su skirtingais slopinimo modeliais. Tarpusavyje palyginta ir mikroparametrų kitimo laike grafikai, tačiau Stevenso ir Hrenijos (Stevens ir Hrenya 2005) eksperimente šių parametrų kitimas nenustatytas. Kad slopinimo modelių duodamus mikro parametrus būtų galima palyginti ne tik kiekybiškai, bet ir kokybiškai, pasinaudota Van Zibroeko (Van Zeebroeck *et al.* 2003) publikacija. Čia pristatytas švytuoklės eksperimentas, kurio metu nustatoma kontakto jėgos, deformacijos ir sąveikos greičio kitimas laike.

2.4.1. Restitucijos koeficiento priklausomybės nuo pradinio kontakto greičio įtaka klampiatampraus slopinimo modeliavimui

Šiame poskyryje palyginti dviejų plieninių sferų centrinio smūgio RK e priklausomybės nuo w_0 apskaičiuotos taikant LS , HU , BR , TS ir LH slopinimo modelius. Dviejų sferų susidūrimo modeliavimui taikomų $C_i(h)$, $i \in \{LS, HU, BR, TS, LH\}$ slopinimo funkcijų c_i nedimensiniai slopinimo koeficientai buvo apskaičiuotos taip, kad visų tiriamų slopinimo modelių RK e būtų lygus eksperimentiškai nustatytam RK $e_{exp} = 0,879$ kai pradinis kontakto greitis $w_0 = w_0^* = 0,84$ m/s, t. y. $e_i(w_0^*) = e_{exp}(w_0^*)$, $i \in \{LS, LH, TS, BR, HU\}$. Skaitinio eksperimento dalelės atitiko eksperimentiškai tirtas daleles: abiejų dalelių spinduliai $R = 1,27$ cm, dalelių plienas – AISI 316, tankis $\rho = 7850$ kg/m³, tamprumo modulis $E = 193$ GPa ir Puasono koeficientas $\mu = 0,35$. Pradinis kontakto greitis kito $w_0 \in [0,4, 1,4]$ m/s intervale.

Eksperimentiniai duomenys paimti iš Stevensas ir Hrenija (Stevens ir Hrenya 2005).

Pasirinktą RK $e_i(0,84) = e_{exp}(0,84) = 0,879$ atitinkantys nedimensiniai slopinimo koeficientai yra tokie: $c_{LS} = 0,082$, $c_{LH} = 0,070$, $c_{TS} = 0,092$, $c_{BR} = 0,114$ ir $c_{HU} = 0,231$. Kaip matyti iš 2.4 paveikslo $e_{LS}(w_0) = e_{TS}(w_0) = const$, kai $w_0 \in [0,4, 1,4]$ (TS ir LS kreivės sutampa ir nepriklauso nuo w_0). Empirinis RK e_{exp} ir $e_i(w_0)$ $i \in \{LH, BR\}$ priklauso nuo w_0 . Tai pat LH, BR, HU ir RK modelių RK e priklausomybės nuo w_0 skiriasi tiek tarpusavyje t. y. $e_i(w_0) \neq e_j(w_0)$, $\forall i, j \in \{LS, LH, TS, BR, HU\}$, $i \neq j$, tiek ir nuo empirinės kreivės, t. y. $e_i(w_0) \neq e_{exp}(w_0)$, kai $w_0 \in [0,4, 1,4] \setminus \{w_0^*\}$. Atlikus modeliavimą nustatyta, kad skirtingų slopinimo modelių kontakto trukmė gaunama tokia pati, t. y. $\Delta T = 81,3 \cdot 10^{-6}$ s.



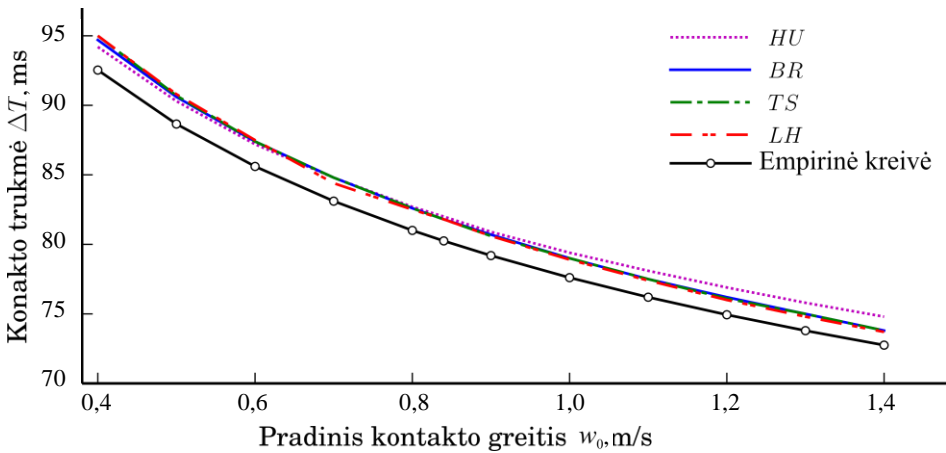
2.4 pav. Restitucijos koeficiento e priklausomybės nuo pradinio greičio w_0 : LS, HU, BR, TS ir LH kreivės kai $v_0 = 0,84$ m/s ir Empirinės kreivės —○— kai $v_0 = w_0 \in [0,4, 1,4]$ m/s

Fig. 2.4. Dependences of the restitution coefficient on the initial contact velocity w_0 : for curves LS, HU, BR, TS and LH at $v_0 = 0,84$ m/s, and for the Empirical curve —○— when $v_0 = w_0 \in [0,4, 1,4]$ m/s

Iš pateiktos analizės matome, kad jeigu sistemos dalelių RK e nepriklauso nuo w_0 , tuomet tokių sistemų modeliavimui geriausia taikyti LS ir TS slopinimo modelius su tokiomis C_i , $i \in \{LS, TS\}$, kad apskaičiuoti kontaktuojančių kūnų RK e_i atitiktų užsiduotas RK e reikšmes. Tačiau kai RK e priklauso nuo w_0 , tuomet galima taikyti kitus LH, BR ar HU slopinimo modelius, pagal kuriuos apskaičiuoti RK e priklauso nuo w_0 . Tačiau 2.4 paveiksle matyti, kad šie modeliai gali būti netikslūs, kadangi $e_i(w_0) \neq e_{exp}(w_0)$, kai $w_0 \in [0,4, 1,4] \setminus \{v_0^*\}$, $i \in \{LH, BR, HU\}$. Kai RK e priklauso nuo w_0 , tuomet didesniai skaičiavimo

tikslumui užsiduota RK e priklausomybė nuo w_0 , pavyzdžiui pagal empirinius duomenis, gali būti aproksimuota modifikuojant jau minėtus esamų LH , BR ar HU slopinimo modelių C_i slopinimo funkcijų c_i nedimensines slopinimo koeficientus, dabar jau priklausysiančias nuo w_0 , t. y. $c_i(w_0)$, taip, kad $e_i(w_0) \approx e_{exp}(w_0)$ kai $w_0 \in [0, w_{0,max}]$, čia $w_{0,max}$ – numatomas didžiausias persidengimo pradinis greitis. Šios problemos sprendimas pasiūlytas 2.1 šios disertacijos poskyryje.

2.5 paveiksle matyti, kad BR , LH , TS ir HU modelių dalelių kontakto trukmė skiriasi nedaug, t. y. galima sakyti, kad $\Delta T_i(w_0) \approx \Delta T_j(w_0) > \Delta T_{exp}(w_0)$, $w_0 \in [0,4, 1,4]$, $i, j \in \{LH, BR, HU, TS\}$, $i \neq j$. Didžiausi santykiniai skirtumai: $\max\{\max\{(\Delta T_i(w_0) - \Delta T_j(w_0))/\Delta T_j(w_0): w_0 \in [0,4, 1,4]\}: i, j \in \{LH, BR\}\} < 1\%$ ir $\max\{\max\{(\Delta T_i(w_0) - \Delta T_j(w_0))/\Delta T_j(w_0): w_0 \in [0,4, 1,4]\}: i, j \in \{LH, BR, HU\}\} \approx 18 \%$.



2.5 pav. Kontakto trukmės ΔT priklausomybė nuo pradinio kontakto greičio w_0 :
 HU , BR , TS ir LH kreivės kai $v_0 = 0,84$ m/s ir empirinės kreivės —○— kai
 $v_0 = w_0 \in [0,4, 1,4]$

Fig. 2.5. Dependences of the contact period ΔT on the initial contact velocity w_0 :
for curves HU , BR , TS and LH at $v_0 = 0,84$ m/s, and for the empirical curve
—○— when $v_0 = w_0 \in [0,4, 1,4]$

2.4 ir 2.5 paveiksluose pavaizduotos empirinės kreivės —○— yra gautos $0,865,607w_0^{-0,068} = e_{exp}(w_0)$ ir $77,607w_0^{-0,192} = \Delta T_{exp}(w_0)$ funkcijomis aproksimavus eksperimentinius duomenis mažiausių kvadratų metodu. Eksperimentiniai duomenys paimti iš (Stevens ir Hrenya 2005). 2.4 ir 2.5 paveiksluose eksperimentiniai taškai nepavaizduoti.

Nors $e_{TS}(w_0) = e_{LS}(w_0)$, tačiau kontakto trukmės $\Delta T_{TS}(w_0) \neq \Delta T_{LS}(w_0)$, $w_0 \in [0,4 \text{ } 1,4] \text{ m/s}$. Dėl didelio $\Delta T_{TS}(w_0)$ neatitikimo kitų modelių $\Delta T(w_0)$ 2.5 paveiksle nepavaizduota ΔT_{TS} priklausomybė nuo w_0 . Atlikus skaičiavimus nustatyta, kad $|\Delta T_{max,TS} - \Delta T_{max,LS}| \gg |\Delta T_{max,i} - \Delta T_{max,j}|$, čia $i, j \in \{LH, BR, HU, TS\}$, $\Delta T_{max,i} \in \max\{\Delta T_i(w_0): w_0 \in [0,4, 1,4]\}$, $i \in \{LH, BR, HU, LS, TS\}$. Bendrai, reikia pabrėžti, kad $|\Delta T_{max,LS} - \Delta T_{max,i}| \gg |\Delta T_{max,i} - \Delta T_{max,j}|$, čia $i, j \in \{LH, BR, HU, TS\}$. 2.6 paveiksle pavaizduotos eksperimentiškai nustatytos ΔT_{exp} ir ΔT_{LS} priklausomybės nuo w_0 . LS modelio $\Delta T_{LS}(w_0) = \text{const}$, t. y. LS modelio ΔT nepriklauso nuo w_0 (2.6 pav.), tačiau 2.5 paveiksle parodyta kad, tiek ΔT_{exp} tiek ir ΔT_i , $i \in \{LH, BR, HU, TS\}$ priklauso nuo w_0 .

LS modelį galima pagerinti taip, kad kontakto trukmė atitiktų eksperimentinę, t. y. $\Delta T_{FLS}(w_0) \approx \Delta T_{exp}(w_0)$ LS modelio (1.17) formulę modifikuojant taip:

$$F_{FLS}(h) = \psi(w_0) K_n h + F_{d,n} = \psi(w_0) \frac{4}{3} E_{eff} R_{eff} h + C_{FLS} \frac{dh(t)}{dt}, \quad (2.24)$$

t. y. imant, kad tiesinė tamprią sąveiką atitinkanti jėga $F_{el,n} = \psi(w_0) K_n h$ tiesiškai priklauso nuo $\psi(w_0)$ funkcijos priklausančios nuo pradinio kontakto greičio w_0 ; (2.24) formulėje indeksu FLS žymimas modifikuotas LS modelis. FLS modelio ((2.24) formulė) slopinimo funkcija C_{FLS} apskaičiuojama pagal (1.18) formulę imant $K_n \psi(w_0)$ standumą:

$$C_{FLS} = c_{LS} \sqrt{m_{eff} 4/3 E_{eff} R_{eff} \psi(w_0)}, \quad (2.25)$$

čia c_{LS} toks pat kaip ir LS modelio ir yra pateiktas (1.20) formulėje.

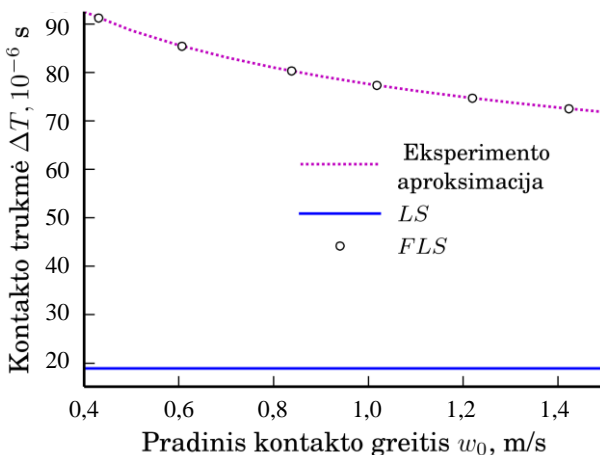
$\psi(w_0)$ funkcija galima parinkti pagal $T_{FLS}(w_0) \approx T_{exp}(w_0)$ sąlygą. Paprasčiausia $\psi(w_0)$ funkciją aproksimuoti tiesės lygtimi taikant mažiausių kvadratų metodą skaitiškai apskaičiavus $\psi(w_0)$ funkcijos reikšmes tam tikruose taškuose $\{w_{0,i}, i \in \mathbb{I} \subset \mathbb{N}\}$. Pavyzdžiui, nagrinėjamo dalelių smūgio atveju $\psi(w_0)$ funkcijos reikšmės $\{w_{0,i}\} = \{0,431, 0,606, 0,837, 1,0175, 1,2190, 1,423\}$ m/s taškuose ir jos aproksimacijos $\tilde{\psi}(w_0) = 0,032842 + 0,02495 w_0$ reikšmės duotos 2.2 lentelėje. Iš 2.2 lentelės matyti, kad $\psi(w_0) < 1,0$, todėl $K_n \psi(w_0) < K_n$.

2.2 lentelė. Nagrinėjamo skaitinio eksperimento modifikuoto tiesinio modelio (FLS) $\psi(w_0)$ ir $\tilde{\psi}(w_0)$ funkcijų reikšmės

Table 2.2. The values of the functions $\psi(w_0)$ and $\tilde{\psi}(w_0)$ of fitted linear spring model

w_0 , m/s	0,431	0,606	0,837	1,0175	1,2190	1,423
$\psi(w_0)$	0,042316	0,04833	0,054774	0,05907	0,063366	0,067275
$\tilde{\psi}(w_0)$	0,043584	0,047974	0,053737	0,058228	0,063265	0,068342

2.6 paveiksle pavaizduotos empirinės ΔT priklausomybės nuo w_0 ir ΔT priklausomybės nuo w_0 gautos taikant LS ir FLS modelius. Taikant FLS modelį buvo imamos 2.2 lentelėje duotos $\psi(w_0)$ funkcijos reikšmės. Šis paveikslas akivaizdžiai iliustruoja, kad $\Delta T_{exp}(w_0) \gg \Delta T_{LS}(w_0) \equiv const$, kai $w_0 \in (0,43, 1,43)$ m/s. Taip pat iš 2.6. paveiksle matyti, kad taikant (2.24) formulę galima gauti pakankamai gerą teorinių skaičiavimo rezultatų atitikimą eksperimentiniams duomenims.



2.6 pav. Kontakto trukmės ΔT priklausomybės nuo pradinio kontakto greičio w_0 gautos aproksimavus eksperimento duomenis ir taikant LS modelį bei FLS modelį su 2.2 lentelės $\psi(w_0)$ funkcijos reikšmėmis

Fig. 2.6. Durations of the contact ΔT versus the initial contact velocity w_0 obtained by approximation of the experimental results and by model LS and FLS model together with values of function $\psi(w_0)$ of Table 2.2

Reikia pabrėžti, kad $RK_{e_{FLS}} = e_{LS} = e$ kai C_{LS} ir C_{FLS} apskaičiuojami pagal (1.18) ir (2.25) formules atitinkamai, kadangi RK_e priklauso tik nuo slopinimo jėgos F_d , bet ne nuo tamprią sąveiką atitinkančios F_{el} jėgos.

2.4.2. Kontakto jėgos, persidengimo, persidengimo greičio ir jų kitimo palyginimas

Nagrinėjant dalelių kontaktą svarbu ne tik kontakto trukmė ar restitucijos koeficientas, bet ir kiti dydžiai apibūdinantys dalelių elgseną kontakto metu: kontakto jėga F , persidengimas h_i , kontakto greitis $dh_i(t)/dt$ ir pagreitis $d^2h_i(t)/dt^2$, $i \in \{HU, BR, TS, LH, FLS, HZ\}$, bei jų tarpusavio priklausomybės. Šiame poskyryje pailiustruotas šių dydžių kitimas kontakto metu. Skaičiavimai

atlikti taikant *LS*, *LH*, *TS*, *BR* ir *HU* slopinimo modelius su tokiais pačiomis sferomis ir pradinėmis sąlygomis kaip ir ankstesniame 2.4.1 poskyryje pagal (Stevens ir Hrenya 2005) duomenis. Tačiau šiame tyrime restitucijos koeficientas buvo sumažintas iki $e = 0,5$ siekiant padidinti slopinimo jėgos įtaką ir išryškinti atsirandančius skirtumus. Apskaičiuoti kontakto parametrai ir jų didžiausios reikšmės duotos 2.3 lentelėje ir 2.7 paveiksle.

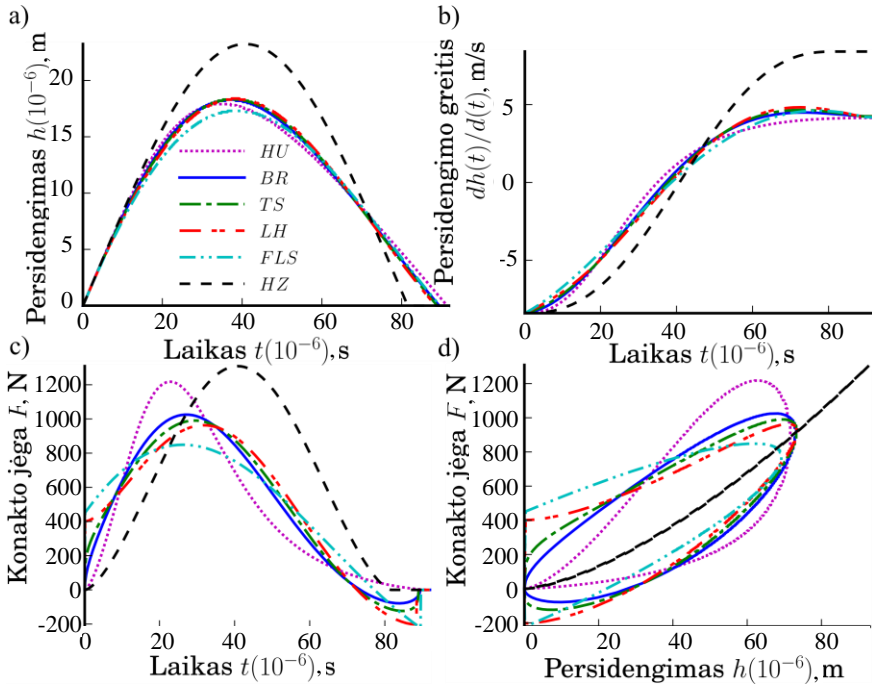
2.3 lentelė. Dviejų plieninių dalelių kontakto modeliavimo rezultatai

Table 2.3. Simulation results of two steel particles contact

Slopinimo modelio žymuo	$h_{max}, 10^{-6} \text{ m}$	$\Delta T, 10^{-6} \text{ s}$	$T_{appr}, 10^{-6} \text{ s}$	$F_{max}, \text{ N}$
<i>LS</i>	17,3	89,5	77,2	849
<i>LH</i>	18,4	88,4	72,5	963
<i>TS</i>	18,3	88,9	72,7	991
<i>BR</i>	18,3	89,5	73,4	1025
<i>HU</i>	17,9	91,3	-	1218

Nors visų, išskyrus *HZ*, tirtų slopinimo modelių RK $e_i = 0,5$, $i \in \{HU, BR, TS, LH, FLS\}$, tačiau šių modelių kontaktą apibūdinantys dydžiai yra skirtingi, t. y. $F_i(t) \neq F_j$, $h_i \neq h_j$, $dh_i(t)/dt \neq dh_j(t)/dt$ ir $d^2h_i(t)/dt^2 \neq d^2h_j(t)/dt^2$, $t \in [t_0, t_p]$, $i, j \in \{HU, BR, TS, LH, FLS, HZ\}$, $i \neq j$, čia t_0 – kontakto pradžia, $t_p = t_0 + \Delta T$ – kontakto pabaiga.

2.7 c) paveiksle pavaizduota, kad $F_{LH}(t) \neq 0$ ir $F_{FLS}(t) \neq 0$ kai $t \in \{t_0, t_p\}$. Taip yra todėl, kad tiesiniai slopinimo modeliai *LH* ir *FLS* priklauso tik nuo pradinio kontakto arba persidengimo greičio $dh(t)/dt$ kuris yra mažiausias kontakto pradžioje ir didžiausias kontakto pabaigoje, t. y. ekstremalias reikšmes įgyja kai $t \in \{t_0, t_p\}$. Suprantama, kad kai $C \equiv const$, tuomet slopinimo jėga $F_d(t) = C dh(t)/dt$ ekstremalias reikšmes įgys tuose pačiuose taškuose, t. y. kai $t \in \{t_0, t_p\}$. Kadangi $h(t) = 0$ kai $t \in \{t_0, t_p\}$, tuomet $|F_d(t)| > F_{el}(t)$. 2.7. d) paveiksle F_i-h_i fazinės erdvės, kai $i \in \{HU, BR, TS, LH, FLS, HZ\}$. Kaip akivaizdžiai matyti iš šio paveikslo *HU*, *BR*, *TS*, *LH* ir *FLS* kreivėms būdingos histerezės. Histerezės ribojamos erdvės plotas atitinka energijos nuostolius kontakto metu. Kadangi visų slopinimo modelių RK $e_i = 0,5$ tai ir histerezinių ribojamų erdvių plotai turi būti lygūs. Akivaizdu, kad netiesiškai tamprios *HZ* sąveikos $F_{HZ}-h_{HZ}$ fazinė erdvė neturi jokios histerezės, kadangi $e_{HZ} = 1,0$, t. y. nėra jokių energijos nuostolių, 2.7 d) paveiksle punktyrinė linija.



2.7 pav. a) ir b) – persidengimo h ir jo greičio priklausomybės nuo laiko t ; c) ir d) – kontakto jėgos priklausomybės nuo laiko ir nuo persidengimo, atitinkamai

Fig. 2.7. Overlap h a) and its velocity b) versus time t ; and contact force versus time c) and overlap d)

Iš 2.4 lentelės ir 2.7 a) paveikslo matyti, kad didžiausias persidengimas $h_{\max,i} = \max\{h_i(t): t \in [t_0, t_p]\}$, $i \in \{HU, BR, TS, LH, FLS\}$ nedaug priklauso slopinimo modelio. Iš 2.7. b) paveikslo matyti, kad nagrinėtų slopinimo modelių persidengimo greitis $dh_i(t)/dt$ yra toks pat tik kontakto pradžioje ir pabaigoje, t. y. $dh_i(t)/dt = dh_j(t)/dt$, $t \in \{t_0, t_p\}$, $i, j \in \{HU, BR, TS, LH, FLS\}$, $i \neq j$. Kai $t \in]t_0, t_p[$ tuomet $dh_i(t)/dt \neq dh_j(t)/dt$. Iš 2.7. c) paveikslo taip pat galima matyti, kad kontakto pabaigoje $F_i \neq 0$, $i \in \{BR, TS, LH, FLS\}$, taip pat matyti, kad susidaro fiziškai nepagrįsta traukos jėga apie kurią jau buvo rašyta 1.9.5 poskyryje, t. y. kontakto pabaigoje, $|F_d| > |F_{el}|$ ir $\text{sign}(F_d) = -\text{sign}(F_{el})$. Tačiau minėtas trūkumas nebūdingas HU slopinimo modeliui.

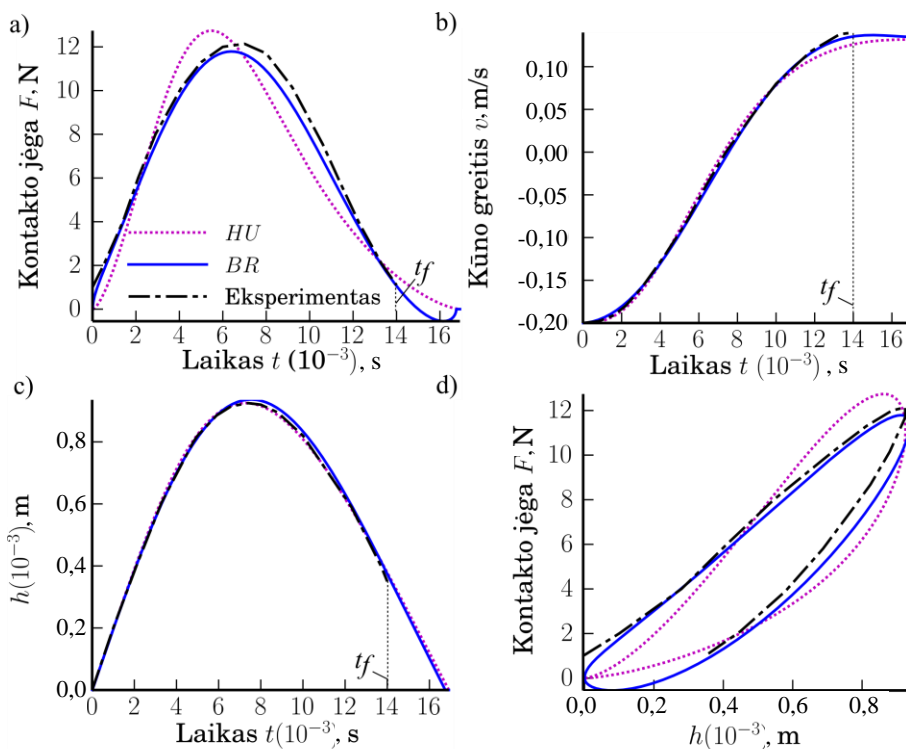
2.4.3. Metalinės ir guminės pusferių eksperimentiškai nustatytų kontakto parametrų palyginimas su teoriniais skaičiavimais

Svarbu ne tik palyginti slopinimo modelius tarpusavyje, bet ir įvertinti jų atitikimą eksperimento rezultatams. Šiame poskyryje pateiktas metalinės ir guminės pusferės eksperimentiškai ir skaitiškai nustatytų kontakto parametrų palyginimas. Modeliavimui buvo taikyti *BR* ir *HU* slopinimo modeliai. Kiti modeliai nebuvo taikyti, nes ankstesni skaičiavimai parodė, kad *LH*, *LS*, *FLS* ir *TS* modeliai mažiau tikslūs nei *BR* ir *HU*.

Atliekant lyginamąją analizę pasinaudota (Van Zeebroeck *et al.* 2003) eksperimento duomenimis, kur švytuoklė su gale pritvirtina 25 mm spindulio sferos puse atsitreikia į standžiai pagrinde įtvirtintą guminę 41,5 mm spindulio guminę sferos pusę. Skaičiavimų ir eksperimento rezultatai pavaizduoti 2.8 paveiksle. Kontakto pabaigoje kontakto jėga F ir persidengimas h yra nedideli, todėl galimos didelės matavimo paklaidos. Dėl šių priežasčių 2.8 paveikslo eksperimentinės F_{exp} ir h_{exp} kreivės nubraižytos nuo kontakto pradžios iki $t_f = 14 \cdot 10^{-3}$ s (žiūrėti 2.8 paveikslo vertikalią punktyrinę liniją), tuo tarpu kontakto pabaigos laikas $t_p > 16 \cdot 10^{-3}$ s.

Reikia pabrėžti, kad kai kuriuos eksperimentinius parametrus yra sunku nustatyti tiesiogiai, todėl jie buvo paskaičiuoti. Švytuoklėje įmontuota sferos dalis prieš susidūrimą judėjo 0,2 m/s greičiu ir atšoko 0,135 m/s greičiu. Taikant gautą restitucijos koeficientą $e = 0,675$ nustatyti nedimensiniai slopinimo koeficientai: $c_{BR} = 0,352$ ir $c_{HU} = 0,760$. Literatūroje (Van Zeebroeck *et al.* 2003) buvo pateiktas standumo koeficientas $K_n = 3,95 \cdot 10^5 \text{ kgs}^{-2}\text{m}^{-1/2}$ ir *BR* modelio slopinimo funkcija $C_{BR}(h) = 6,88 \cdot 10^{-2} h^{0,5} \text{ kgm}^{-1/2}\text{s}^{-1}$, tačiau nebuvo pateikta modeliavimui reikalinga m_{eff} . Efektyvioji masė m_{eff} buvo apskaičiuota taikant $C_{BR}(h) = c_{BR} m_{eff}^{0,4} v_0^{-0,2} K_n^{3/5} h^{0,5}$ formulę (žiūrėti 2.1 lentelę) imant jau minėtas eksperimentiškai nustatytas reikšmes: $C_{BR}(h) = 6,88 \cdot 10^{-2} h^{0,5} \text{ kgm}^{-1/2}\text{s}^{-1}$, $c_{BR} = 0,352$, $v_0 = 0,2 \text{ m/s}$ ir $K_n = 3,95 \cdot 10^5 \text{ kgs}^{-2}\text{m}^{-1/2}$. Tuomet iš $C_{BR}(h) = c_{BR} m_{eff}^{0,4} v_0^{-0,2} K_n^{3/5} h^{0,5}$ $h^{0,5} = 6,88 \cdot 10^{-2} h^{0,5}$ efektyviosios masės išraiška yra $m_{eff} = (6,88 \cdot 10^{-2} / (c_{BR} v_0^{-0,2} K_n^{3/5}))^{2,5}$.

Kaip galime matyti iš 2.8 paveikslo teoriniai ir eksperimentiniai smoginio kūno greičio ir persidengimo h rezultatai skiriasi nedaug viso kontakto metu. Tačiau, didesni skirtumai susidaro tarp eksperimentinės ir teorinės kontakto jėgų. 2.8 paveiksle akivaizdžiai matyti, kad didžiąją $[t_0, t_f]$ intervalo dalį $|F_{exp}(t) - F_{HU}(t)| > |F_{exp}(t) - F_{BR}(t)|$. Todėl, nors fizikine prasme pranašesnis yra *HU* modelis, tačiau šiuo atveju *BR* modelis geriau atitinka eksperimento rezultatus, todėl *HU* fizikinis pranašumas prieš kitus slopinimo modelius yra abejotinas.



2.8 pav. Nagrinėjamo kūno teoriniai ir eksperimentiniai kontakto parametrai:

a) – kontakto jėgos F , b) – kūno judėjimo greičio v , c) – persidengimo h ir d) – kontakto jėgos F ir persidengimo h

Fig. 2.8. Theoretical and experimental parameters of the body under investigation: a) is contact force, b) is velocity of the body v , c) is overlap h and d) is contact force F and overlap h

2.5. Bangų sklidimas dalelių grandinėje

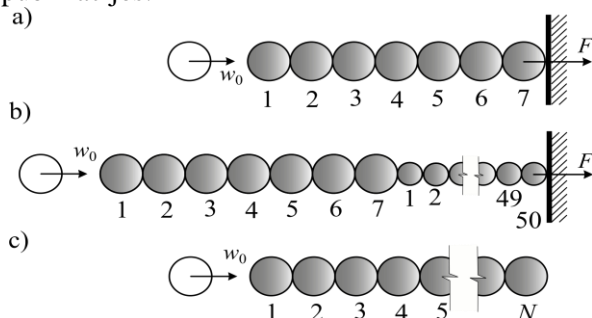
Dviejų dalelių kontakto modeliavimas ir nagrinėjimas negali atspindėti daugelio dalelių sistemos elgsenos vien jau dėl to, kad daugelio dalelių sistemoje dalelės kontaktuoja daugybę kartų. Norint įvertinti daugelio kontaktų įtaką dalelės elgsenai galima pasitelkti dalelių grandinės modelį kuriame dalelės kontaktuoja centriniu smūgiu. Tokią sistemą galima nagrinėti kaip turinčią tik vieną laisvės laipsnį. Tai palengvina ir supaprastina tiek daugelio dalelių kontakto tyrimą tiek ir rezultatų pateikimą bei interpretavimą.

Šiame poskyryje atliktas bangų sklidimo dalelių grandinėse skaitinis modeliavimas taikant skirtingus slopinimo modelius: *LH*, *TS*, *BR* ir *HU*. Tiesinis *LS* ir modifikuotas *FLS* modeliai skaitiniame tyrime taikyti nebuvo dėl to, kad ankstesni tyrimai parodė jog šie modeliai yra netikslūs skaičiuojant ΔT .

Iš viso buvo tiriami trys atvejai:

- I atvejis. Jėgos bangos sklidimas 1 tipo dalelių grandinėje, sudarytoje iš 7 didelių vienodo dydžio dalelių, (2.9 a) pav.). Paskutinė dalelė atremta į standų pagrindą.
- II atvejis. Jėgos bangos sklidimas 2 tipo dalelių grandinėje, sudarytoje iš 7 didesnių ir 50 mažesnių dalelių, (2.9 b) pav.). Paskutinė dalelė atremta į standų pagrindą.
- III atvejis. Dalelių greičio bangos sklidimas ramybės būsenos 3 tipo dalelių grandinėje sudarytoje iš 50, 60, 70, 80, 90, 100, 150 ir 200 dalelių, t. y. $N \in \{50, 60, 70, 80, 90, 100, 150, 200\}$ (2.9 c) pav.). Visos dalelės prieš sąveiką yra ramybės būsenoje, dalelių judėjimas erdvėje neapribotas.

Bangos sklidimas buvo modeliuojama smogiant vieną dalelę (2.9 paveiksle, balta dalelė) w_0 pradiniu greičiu į atitinkamą dalelių grandinę. Reikia pažymėti, kad grandinės dalelių skaičius neapima smogiančios dalelės, todėl iš tikrųjų kontaktuoja $N+1$ dalelių. Smogiančiosios dalelės savybės buvo tokios pat kaip ir skaičiuojamos grandinės pirmos dalelės savybės. Jėgos bangos sklidimo modeliavimo rezultatai gauti taikant *LH*, *TS*, *BR* ir *HU* slopinimo modelius buvo palyginti su eksperimentiniais duomenimis publikuotais Džobo (Job *et al.* 2008) ir Ngujeno (Nguyen ir Brogliato 2012), Melo (Melo *et al.* 2006) bei Santibanezo (Santibanez *et al.* 2011) straipsniuose, o *LH*, *TS*, *BR* ir *HU* slopinimo modelių dalelių greičio bangos sklidimo modeliavimo rezultatai buvo palyginti tik tarpusavyje imant tokias pačias daleles kokios buvo taikytos 2.4.1 poskyrio skaičiavimuose iš Hrenija (Stevens ir Hrenya 2005) publikacijos.



2.9 pav. Tiriamos dalelių grandinės: a) – I atvejis, 1 tipo dalelių grandinė; b) – II atvejis, 2 tipo dalelių grandinė; c) – III atvejis, 3 tipo dalelių grandinė

Fig. 2.9. Chains of the particles: case I, type of chain of particles 1 a); case II, type of chain of particles 2 b); case III, type of chain of particles 3 c)

2.5.1. Tyrimo objektas ir skaičiavimo duomenys

2.4 lentelė. I, II ir III modeliavimo atvejo, 1, 2 ir 3 dalelių grandinės pagrindiniai duomenys

Table 2.4. I, II ir III simulation cases, 1, 2 ir 3 particles chains parameters

Skaičiavimo atvejis	Dalelės tipas	R_p , mm	Medžiaga	E , GPa	μ	ρ , kg/m ³	Literatūros šaltinis	N , vnt.
I	Didelė	13,0	Plienas, AISI 52100	203	0,3	7780	(Job <i>et al.</i> 2007)	7
II	Didelė	13,0						50
	Maža	6,5						
III	Didelė	12,7	Plienas, AISI 316	193	0,35	7850	(Stevens ir Hrenya 2005)	50, 60, 70, 80, 90, 100, 150, 200

2.5 lentelė. I, II ir III skaičiavimo atvejų, 1, 2 ir 3 grandinių pradiniai skaičiavimo ir įvesties duomenys

Table 2.5. I, II ir III simulation cases, 1, 2 ir 3 particles chains initial parameters

Kontakt- uojančios dalelės	Pradiniai skaičiavimo duomenys				Įvesties duomenys			
	K_n , GN/m	m_{eff} , kg	w_0 , m/s	RK_e	C_{LH}	C_{TS}	C_{BR}	C_{HU}
I atvejis, 1 grandinė								
Didelė – didelė	12,0	0,0358	0,34	0,965	0,018	0,024	0,026	0,062
II atvejis, 2 grandinė								
Didelė – didelė	12,0	0,0358	0,34	0,965	0,018	0,024	0,026	0,062
Didelė – maža	9,8	0,0080		0,965	0,018	0,024	0,026	0,062
Maža – maža	8,5	0,0045		0,965	0,018	0,024	0,026	0,062
III atvejis, 3 grandinė								
Didelė – didelė	11,7	0,0344	1,0	0,8	0,120	0,159	0,200	0,410
				0,5	0,351	0,472	0,6150	1,462

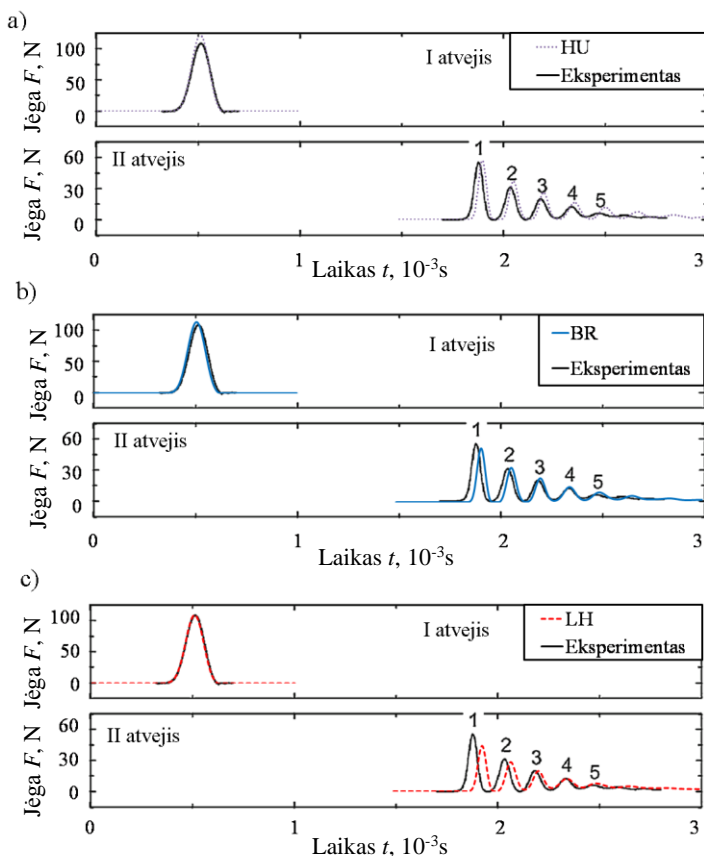
Bangų sklaidimo granuliuotose medžiagose eksperimentinių tyrimų nėra daug, tai lemia skaitinio tyrimo objekto ir dalelių savybių pasirinkimą. Jėgos bangų sklaidimo modeliavimas (I ir II atvejais 1 ir 2 dalelių grandinių tipas) buvo atliktas su tokiomis dalelių grandinėmis, dalelių savybių ir pradinėmis sąlygomis kokios buvo duotos Džobo (Job *et al.* 2007, 2008) bei Ngujeno (Nguyen ir Brogliato 2012), straipsniuose kuriame publikuoti eksperimentinio tyrimo rezultatai. Dalelių greičio bangos sklaidimas (III atvejis 3 dalelių grandinės tipas) buvo modeliuotas pasitelkiant Hrenijos (Stevens ir Hrenya 2005) naudotų dalelių savybes. Hrenija eksperimentiškai netyrė dalelių greičių sklaidimo, tačiau šios publikacijos realių dalelių duomenys buvo panaudoti skaitiniam tyrimui taikant skirtingus slopinimo modelius.

I, II ir III skaičiavimo atvejų, 1, 2 ir 3 grandinių dalelių savybės pateiktos 2.4 lentelėje. I ir II skaičiavimo atvejo 1 ir 2 grandinių dalelių kontakto pagrindiniai pradiniai skaičiavimo ir įvesties duomenys pateikti 2.5 lentelėje.

2.5.2. Jėgos bangos sklaidimo dalelių grandinėje modeliavimo rezultatai ir palyginimas su eksperimentu

Kontakto jėgos ties atrama (2.9 a) ir b) pav.) apskaičiuotos taikant HU , BR ir LH slopinimo modelius ir išmatuotos eksperimentiškai (Job *et al.* 2008; Stevens ir Hrenya 2005; Nguyen ir Brogliato 2012) pavaizduotos 2.10 paveiksle. 2.10 paveikslo a), b) ir c) viršutinėje dalyje parodytas kontakto jėgos kitimas trumpesnėje 7 identiškų dalelių grandinėje, o šių paveikslų patinėje dalyje pavaizduotas kontakto jėgos kitimas ilgesnėje 7 didelių ir 50 mažesnių dalelių grandinėje. Kaip parodyta 2.10 a) – c) paveikslų viršutinėse dalyse, I skaičiavimo atvejis, identiškų dalelių grandinėje susidaro tik viena kontakto jėgos banga, tuo tarpu 7 didelių ir 50 mažesnių dalelių grandinėje susidaro daug kontakto jėgos bangų, ne mažiau kaip 5.

Iš 2.10 a) – c) paveikslų taip pat matyti, kad tiriamų dalelių grandinių F_{HU} ir F_{BR} kontakto jėgos, ties atrama, ir jų kitimas laiko atžvilgiu nedaug skiriasi nuo eksperimentiškai nustatytos kontakto jėgos. I atvejo, 7 dalelių grandinės kontakto jėgų skirtumai $|F_i - F_j|$, $i, j \in \{HU, LH, BR, Exp\}$, $i \neq j$, nėra žymūs, maksimumai pasiekia reikšmes: $\max\{F_{HU}(t), t \in [t_b, t_g]\} = 122,9 \text{ N}$, $\max\{F_{BR}(t), t \in [t_b, t_g]\} = 114,6 \text{ N}$ ir $\max\{F_{LH}(t), t \in [t_b, t_g]\} = 109,2 \text{ N}$, o eksperimentiškai nustatytos jėgos $\max\{F_{exp}(t), t \in [t_b, t_g]\} = 109,0 \text{ N}$, čia t_b ir t_g – skaičiavimo pradžia ir pabaiga. Taigi, taikant LH slopinimo modelį gaunami mažiausi skirtumai lyginant su eksperimentiniais rezultatais.



2.10 pav. I ir II skaičiavimo atvejo eksperimentinių ir apskaičiuotų kontakto jėgų, F_{HU} , F_{BR} , ir F_{LH} , veikiančių atramą (2.9 a) ir b) pav.) svyravimai dalelių grandinėje a) – HU , b) – BR ir c) – LH

Fig. 2.10. Oscillations of the calculated, F_{HU} , F_{BR} , ir F_{LH} , and experimental contact forces of calculation cases I and II at the support (Figs. 2.9 a) and b))

Kitokia situacija susidaro II skaičiavimo atveju. Pirmosios jėgos bangos mažiausias skirtumas $\min\{\max\{|F_i - F_{Exp}|, t \in [t_b, t_g]\}, i, j \in \{HU, LH, BR\}\} = \max\{|F_{HU} - F_{Exp}|, t \in [t_b, t_g]\} = 2,0$ N. Tačiau kitos jėgos bangos apskaičiuojamos tiksliau taikant LH ir BR slopinimo modelius. Iš 2.10 a) – c) paveikslų apatinių dalių (II skaičiavimo atvejis) taip pat matyti, kad teoriškai apskaičiuotos jėgų bangos sklinda greičiau nei eksperimentiškai išmatuotos.

Eksperimentinių ir modeliavimo rezultatų palyginimas parodo nevienareikšmišką slopinimo modelių ir eksperimentinių rezultatų atitikimą. Jeigu I skaičiavimo atveju mažiausios paklaidos gautos taikant *LH* modelį, didžiausios – *HU*, tai II skaičiavimo atveju mažiausios paklaidos gautos taikant *HU* modelį. Todėl modeliuojant dalelių sistemą ir pasirenkant slopinimo modelių svarbu atsižvelgti į RK e priklausomumą nuo pradinio kontakto greičio w_0 .

2.5.3. Dalelių greičio bangos sklidimo vienodų dalelių grandinėje modeliavimo rezultatai

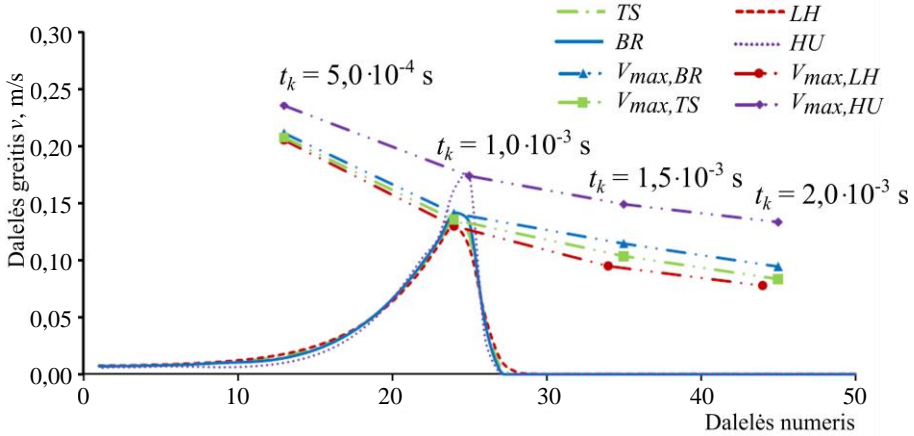
Šiame poskyryje nagrinėta kaip dalelių sistemos likutinė kinetinė energija priklausomai nuo dalelių skaičiaus. Kaip likutinės energijos skirtumas priklauso nuo naudojamo slopinimo modelio. Realios dalelių sistemos modeliavimui reikia parinkti tokį slopinimo modelį, su kuriuo skaičiavimo paklaidos, lyginant su eksperimentu, būtų mažiausios. Tačiau, kaip jau minėta anksčiau, šių skaičiavimų palyginimui eksperimentinių rezultatų nėra, todėl *LH*, *TS*, *BR* ir *HU* modeliai lyginami tik tarpusavyje.

Modeliavimui taikytų dalelių savybės, žiūr. 2.4 ir 2.5 lentelių III skaičiavimo atvejo eilutes, buvo parinktos pagal Stevensas ir Hrenija eksperimento duomenis. Bangos sklidimas buvo modeliuojamas niekaip erdvėje nesuvaržytoje 50 dalelių grandinėje kuri yra pavaizduota 2.9 c) paveiksle.

Bandymo pradžioje dalelės buvo parimusios viena šalia kitos o kontakto jėgos buvo lygios 0. Smūgiuojančios dalelės pradinis greitis $w_0 = v_0 = 1$ m/s, čia v_0 – parametras taikomas *TS*, *BR*, *LH* ir *HU* slopinimo modelių formulėse, žiūr. 2.1 lentelę. Modeliavime taikytų 2.1 lentelės *TS*, *BR*, *LH* ir *HU* slopinimo modelių nedimensiniai slopinimo koeficientai c_i , $i \in \{TS, BR, LH, HU\}$ atitiko pasirinktą RK $e = 0,5$ ir pradinius kontakto greičius – $w_0 = v_0 = 1$ m/s. Reikia paminėti, kad taikytas RK $e = 0,5$ nėra būdingas plieninei dalelei kai $w_0 = 1$ m/s, tačiau taikyta RK reikšmė pasirinkta slopinimo modelių skirtumų išryškiniui.

2.11 paveiksle pateikti nagrinėjamos grandinės i dalelės, $i \in \{1, 2, \dots, 50\}$, $V_{i,j}(t)$ greičiai, apskaičiuoti taikant j slopinimo modelį, $j \in \{TS, BR, LH, HU\}$, kai $t = 10^{-3}$ s, ir dalelių didžiausi greičiai $V_{max,j}(t_k) = \max\{V_{i,j}(t_k), i \in \{1, 2, \dots, 50\}\}$, $j \in \{TS, BR, LH, HU\}$, $t_k \in \{5 \cdot 10^{-4}, 1 \cdot 10^{-3}, 1,5 \cdot 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}\}$ s. Iš 2.11 paveikslo matyti, kad skirtumai $|V_{max,j}(t_k) - V_{max,l}(t_k)|$, $j, l \in \{TS, BR, LH, HU\}$, $j \neq l$, didėja didėjant $t_k \in \{5 \cdot 10^{-4}, 1 \cdot 10^{-3}, 1,5 \cdot 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}\}$ s. Taip yra todėl, kad tik pirmo kontakto metu visų nagrinėjamų modelių RK yra tokie patys, t. y. $e_j = e_l = e = 0,5$, $j, l \in \{TS, BR, LH, HU\}$, kai $w_0 = v_0 = 1$ m/s. Tačiau kitų

kontaktų $w_0 < v_0 = 1$ m/s ir todėl $e_j \neq e_l$. Skirtingos RK reikšmės sąlygoja skirtingą dalelių sistemos elgseną.

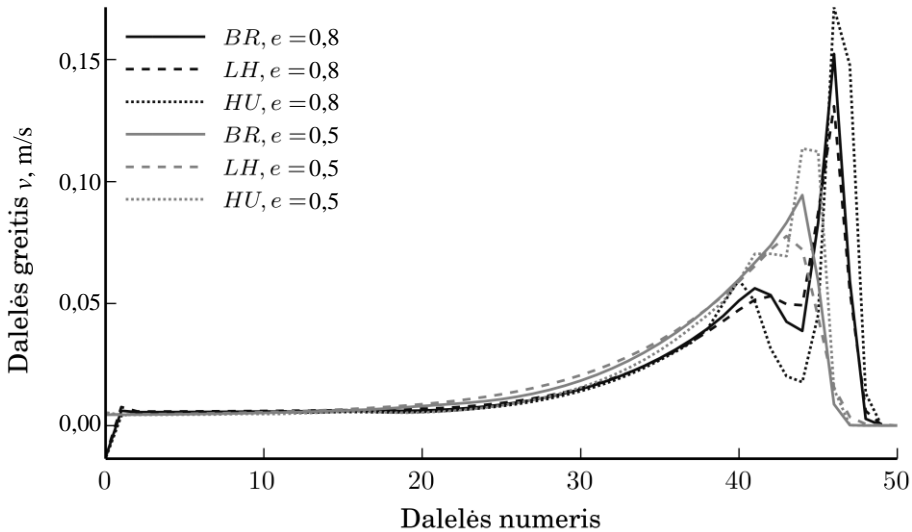


2.11 pav. Grandinės dalelių greičiai, kai $t = 10^{-3}$ s, ir dalelių greičių maksimumai kai $t_k \in \{5 \cdot 10^{-4}, 1 \cdot 10^{-3}, 1,5 \cdot 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}\}$ s

Fig. 2.11. Velocities of particles in the chain at $t = 10^{-3}$ s and maximums of the velocities of the particles at $t_k \in \{5 \cdot 10^{-4}, 1 \cdot 10^{-3}, 1,5 \cdot 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}\}$ s

Pagal vienos dalelės energijos slopinimą, mažėjimo tvarka, narinėjamus slopinimo modelius galima suskirstyti taip: didžiausiu slopinimu pasižymi *LH*, mažesniu *TS*, dar mažesnius *BR* ir paskutinis yra *HU* modelis. Skirtumas tarp *TS* ir *LH* modelio lygus skirtumui tarp *TS* ir *BR* modelio, t. y. $V_{TS,i}(t) - V_{LH,i}(t) = V_{BR,i}(t) - V_{TS,i}(t)$, todėl tolimesniuose skaičiavimuose *TS* modelis dėl lengvai numatomų rezultatų naudojamas nebus.

Modeliuojant dalelių grandinę iš identiškų dalelių su slopinimu smūgiuojančios dalelės greitis po kontakto nėra lygus 0. Po kontakto smūgiuojanti dalelė juda ta pačia kryptimi kaip ir smūgiavo tik su mažesniu greičiu. Todėl smūgiavusių dalelių kinetinė energija nėra lygi 0. Jau smūgiavusių dalelių kinetinės energijos kiekis nedaug priklauso nuo slopinimo modelio. Šis teiginys yra pailiustruotas 2.12 paveiksle. Šiame paveiksle pavaizduotas 2.4 ir 2.5 lentelėse duoto III skaičiavimo atvejo ir 2.9 paveiksle pavaizduotos identiškų dalelių grandinės atskirų dalelių greitis $t = 2 \cdot 10^{-3}$ s laiko momentu kai RK $e \in \{0.5, 0.8\}$. Kaip pavaizduota 2.12 paveiksle, didžiausias dalelių greičių, apskaičiuotų taikant skirtingus slopinimo modelius, skirtumas susidaro smūgio vietoje, t. y. ten kur dalelės persidengimo greitis didžiausias.

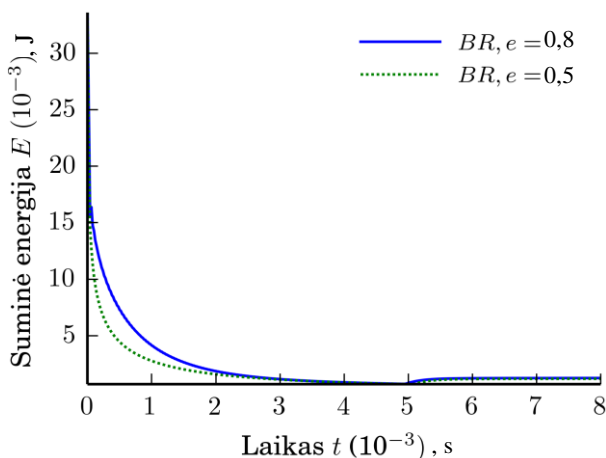


2.12 pav. III skaičiavimo atvejo dalelių greičio pasiskirstymas 3 tipo dalelių grandinėje kai $t = 2 \cdot 10^{-3}$, s

Fig. 2.12. Distribution of velocities of particle in the chain of calculation case III at the moment $t = 2 \cdot 10^{-3}$, s

Atsižvelgiant į skirtumo atsiradimo priežastis, dalelių sistemoje su daug dalelių skirtumai dėl didelio kontaktų skaičiaus turėtų būti didžiausi, tačiau absoliutiniu didumu skirtumas bus mažas nes po daug kontaktų bus didelė energijos sklaida. Didelėse dalelių sistemose, skirtumas tarp sistemos kinetinės energijos baigiantis skaičiavimui tampa nykstamai mažas, nepaisant koks buvo pasirinktas restitucijos koeficientas.

Palyginimui buvo pasirinkta 2.13 paveiksle pavaizduota dalelių grandinė ir naudotas BR slopinimo modelis, kai restitucijos koeficientai $e \in \{0.5, 0.8\}$. Po skaičiavimo suminė visų dalelių kinetinė energija, $E = \sum_{i=1}^N m_i v_i(t)^2/2$, kai $e \in \{0.5, 0.8\}$ yra beveik vienoda, o skirtumas tarp $E_i = m_i v_i(t)^2/2$ kai $e = 0.5$ ir $e = 0.8$ atsiranda tik keliose paskutinėse dalelėse, dėl skirtingų dalelių greičių, (2.12 pav). kai dalelės numeriai kito nuo 45 iki 50. Kinetinės energijos skirtumas paskutinėse dalelėse tiesiogiai priklauso nuo buvusių kontaktų skaičiaus ir jam didėjant skirtumas taip pat didėja. Nors paskutinės dalelės ir juda skirtingais greičiais, tačiau buvusios kontakte dalelės juda vienodu greičiu, dėl anksčiau aprašytų priežasčių, todėl paskutinių dalelių skirtumas yra santykinai mažas su visos sistemos energija (2.13 pav.).



2.13 pav. Visų grandinės dalelių suminės kinetinės energijos kitimas kontakto metu

Fig. 2.13. Change of the total kinetic energy of all particles of the chain during the contact

Apibendrinant galima pasakyti, kad didesnis dalelių skaičius sistemoje reiškia didesnę greičio skirtumą tarp atšokusių dalelių, kai restitucijos koeficientai skirtingi, tačiau to skirtumo įtaka sistemos elgsenai yra nykstamai maža.

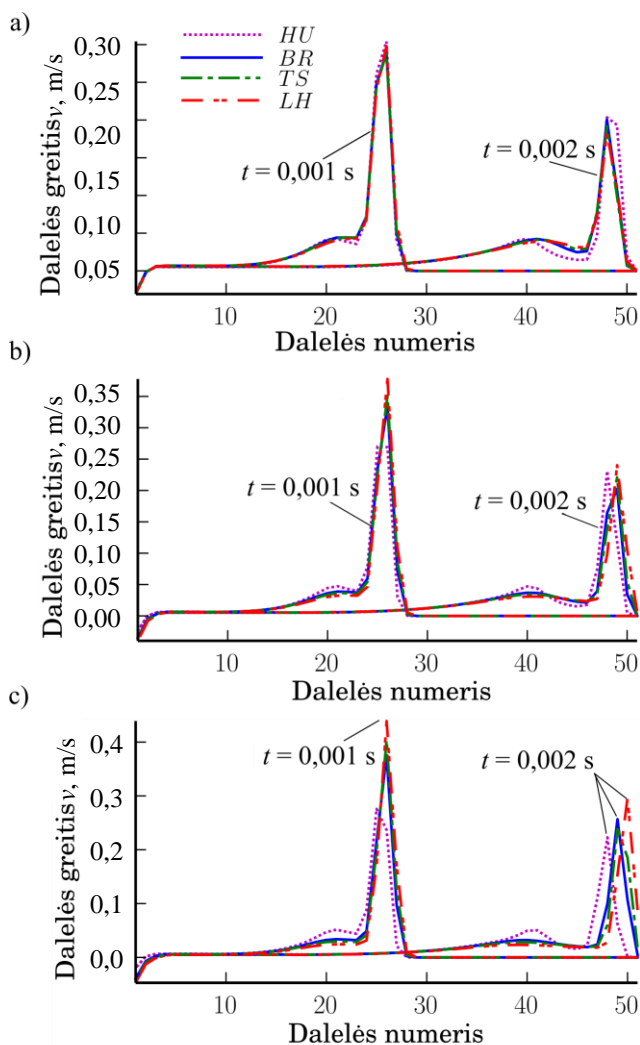
Slopinimo parametrų įtaka iš 50 dalelių sudarytos 3 tipo grandinės, t. y. kai $N = 50$, elgsenai buvo nagrinėta imant tris pradinio kontakto greičio reikšmes, $v_0 \in \{0,5, 0,7, 1,0\} \subset [0, 1]$ m/s kai smogiančios dalelės pradinis kontakto greitis $w_0 = 1,0$ m/s ir tris RK $e \in \{0,910, 0,890, 0,865\}$ reikšmes iš eksperimentinių Stevenso ir Hrenija (Stevens ir Hrenya 2005) tyrimų, Stevenso ir Hrenija empirinė kreivė pavaizduota 2.4 paveiksle. Reikia pažymėti, kad šio skaitinio tyrimo dalelių ir grandinės parametrai, išskyrus w_0 , v_0 , RK e ir kai $N = 50$ vnt. atitinka, III skaičiavimo atvejį.

Dalelių greičiai $v_{i,j}$, $i \in \{1, \dots, N\}$, $j \in \{HU, BR, TS, LH\}$ kai $t \in \{1 \cdot 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}\}$ s laiko momentais parodyti 2.14 paveiksle. Šiame paveiksle dalelių greičių ekstremumai $t \in \{1 \cdot 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}\}$ s laiko momentais susidaro kontaktuojančių dalelių vietose. Bendrai nustatyta, kad kontaktuojančių dalelių $v_{i,HU}(t)$, $v_{i,BR}(t)$, $v_{i,TS}(t)$ ir $v_{i,LH}(t)$ greičių išsidėstymo tvarka tarpusavyje priklauso nuo šių kontaktuojančių dalelių pradinio kontakto greičio $w_{0,i,j}$ $i \in \{1, \dots, N\}$, $j \in \{HU, BR, TS, LH\}$ ir pradinio kontakto greičio v_0 naudojamo (2.16) formulėje arba 2.1 lentelės formulėse nustatant nedimensinį slopinimo koeficientą c . Reikia pažymėti, kad toliau $w_{0,i,j}$ bus žymimas ne smogiančios dalelės pradinis kontakto greitis, kaip yra pavaizduota 2.9 paveiksle, bet tokių i

dalelių pradinis kontakto greitis kurių judėjimo greitis nagrinėjamas $t \in \{1 \cdot 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}\}$ s laiko momentais. Kai smogiančios dalelės pradinis kontakto greitis $w_0 \leq v_0$, tuomet $t \in \{1 \cdot 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}\}$ s laiko momentais nagrinėjamų dalelių $v_{HU,max}(t) > v_{BR,max}(t) > v_{TS,max}(t) > v_{LH,max}(t)$, kai $w_0 > v_0$ tuomet $v_{HU,max}(t) < v_{BR,max}(t) < v_{TS,max}(t) < v_{LH,max}(t)$, čia $v_{j,max}(t) = \max\{v_{i,j}(t), i \in \{1, \dots, N\}\}$, $t \in \{1 \cdot 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}\}$ s, $j \in \{HU, BR, TS, LH\}$ yra maksimalus j slopinimo modelio tam tikros dalelės greitis $t \in \{1 \cdot 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}\}$ laiko momentais.

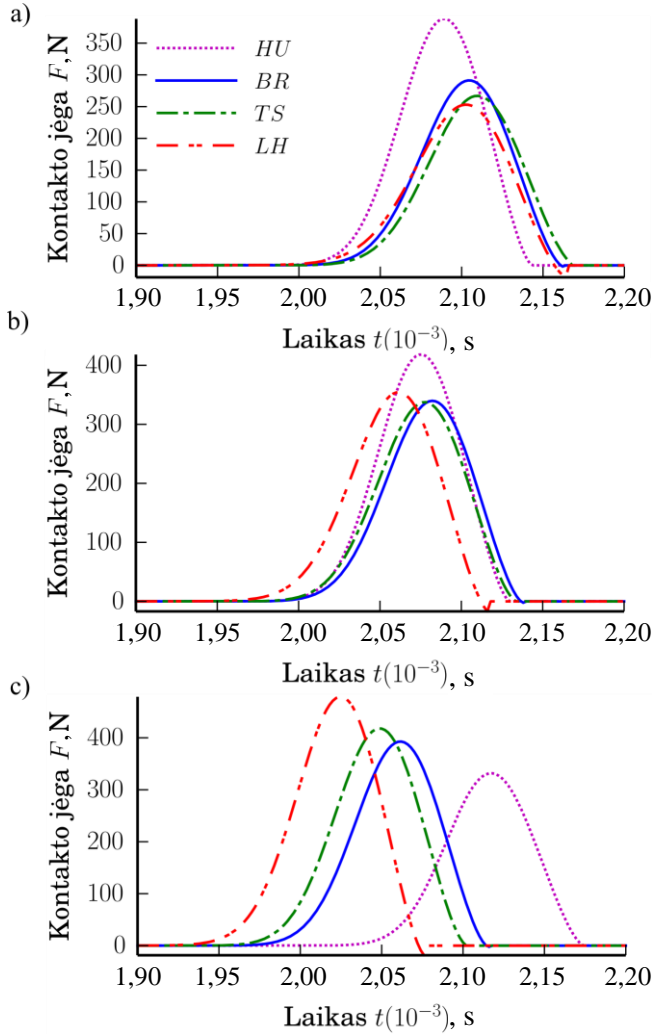
Dėl slopinimo, grandinės pradžioje esančių dalelių pradinis kontakto greitis visuomet yra didesnis nei toliau esančių dalelių pradinis kontakto greitis, t. y. $w_{0,i,j} < w_{0,k,j}$, $i < k \leq N, j \in \{HU, BR, TS, LH\}$. Jeigu modeliavimo pradžioje smogiančios dalelės pradinis kontakto greitis $w_0 > v_0$ ir tam tikram didžiausiam galimam dalelių skaičiui $M \leq N$ galioja $w_{0,z,j} < v_0$, $z \leq M$ sąlyga, tuomet kai $z \leq M$ galioja $e_{z,LH} > e_{z,TS} > e_{z,BR} > e_{z,HU}$ ir $v_{HU,max}(t) < v_{BR,max}(t) < v_{TS,max}(t) < v_{LH,max}(t)$ nelygybės, čia $v_{j,max}(t) = \max\{v_{i,j}(t), i \in \{1, \dots, M\}\}$, $t \in [t_b, t_g]$, $j \in \{HU, BR, TS, LH\}$. Jeigu dalelių grandinė pakankamai ilga, tuomet po tam tikro M kontaktų skaičiaus $M < N$, kai $k > M$ galioja $w_{0,k,j} < v_0$ nelygybė, o RK $e_{k,j}$ išsirikiuoja priešinga tvarka: $e_{k,HU} < e_{k,BR} < e_{k,TS} < e_{k,LH}$. Šiuo atveju nebūtinai su visais $k > M$ galioja $v_{LH,max}(t) > v_{TS,max}(t) > v_{BR,max}(t) > v_{HU,max}(t)$ nelygybė, čia $v_{j,max}(t) = \max\{v_{i,j}(t), i \in \{M+1, \dots, N\}\}$, $t \in [t_b, t_g]$, tačiau esant pakankamai dideliui $k > M$ $v_{LH,max}(t) > v_{TS,max}(t) > v_{BR,max}(t) > v_{HU,max}(t)$ nelygybė gali galioti.

Skirtingi RK e , $w_{0,i,j}$, $i \in \{1, \dots, N\}, j \in \{HU, BR, TS, LH\}$ ir $v_0 \in \{0,5, 0,7, 1,0\}$ taip pat įtakoja nagrinėjamos grandinės dalelių kontakto jėgas F , (2.15 pav.). Šiame paveiksle parodytos įvairių slopinimo modelių kontakto jėgos veikiančios tarp 49 ir 50 dalelių priklausomybės nuo laiko. Iš 2.15 a) paveikslo matyti, kad kai $e = 0,910$ ir $v_0 = 0,5$ m/s skirtingų slopinimo modelių jėgos atitinka tokią nelygybę: $F_{HU,max} > F_{BR,max} > F_{TS,max} > F_{LH,max}$, čia $F_{j,max} = \max\{F_j(t), t \in [t_b, t_p]\}$, $j \in \{HU, BR, TS, LH\}$. Kai $e = 0,890$, $v_0 = 0,7$ m/s, 2.15 b) paveiksle matyti, kad $F_{HU,max} > F_{LH,max} > F_{BR,max} > F_{TS,max}$. Kai $e = 0,865$, $v_0 = 1,0$ m/s, 2.15 b) paveiksle matyti, kad $F_{LH,max} > F_{TS,max} > F_{BR,max} > F_{HU,max}$.



2.14 pav. Dalelių greičiai, kai $t \in \{1 \cdot 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}\}$ s: a) – $e = 0,910$, $v_0 = 0,5$ m/s, b) – $e = 0,890$, $v_0 = 0,7$ m/s ir c) – $e = 0,865$, $v_0 = 1,0$ m/s

Fig. 2.14. Velocities of particles when $t \in \{1 \cdot 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}\}$ s: a) when $e = 0,910$, $v_0 = 0,5$ m/s, b) when $e = 0,890$, $v_0 = 0,7$ m/s and c) when $e = 0,865$, $v_0 = 1,0$ m/s



2.15 pav. Normalinės sąveikos kontakto jėgos veikiančios tarp 49 ir 50 dalelės priklausomybė nuo laiko t : a) – $e = 0.910, v_0 = 0.5 \text{ m/s}$, b) – $e = 0.890, v_0 = 0.7 \text{ m/s}$ ir c) – $e = 0.865, v_0 = 1.0 \text{ m/s}$

Fig. 2.15. Dependencies of the contact force acting between particles 49 and 50 of the normal interaction on time t : a) when $e = 0.910, v_0 = 0.5 \text{ m/s}$, b) when $e = 0.890, v_0 = 0.7 \text{ m/s}$ and c) when $e = 0.865, v_0 = 1.0 \text{ m/s}$

Apibendrinant galima pasakyti, kad dalelių grandinės kokybinė elgsena, dalelių greičio banga, kontakto jėga, energijos sklaida kontakto metu ir dalelių

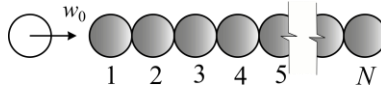
greitis priklauso ne tik nuo naudojamų slopinimo modelių bet ir nuo pradinio smogiančios dalelės greičio w_0 , parametro v_0 naudojamo (2.16) formulėje arba 2.1 lentelės formulėse nustatant nedimensinį slopinimo koeficientą c , RK e ir dalelių grandinės ilgį.

2.5.4. Dalelių grandinės kinetinės energijos nuostolių tyrimas

Nagrinėjant slopinimo modelių įtaką tam tikrai dalelių sistemai, vienas iš aktualių parametrų galėtų būti sistemos kinetinė energija. Kai sprendžiamas uždavinys, kur svarbu dalelių išsibarstymas ar išsidėstymas svarbi tampa dalelės pozicija, o į kokią vietą jos pateks priklauso nuo dalelių judėjimo greičio.

Kinetinės energijos slopinimas dalelių sistemoje gali būti apjudintas pradinio ir likutinių energijų santykiu E_r / E_{in} , čia E_{in} ir E_r yra pradinis ir likutinis (skaičiavimo pabaigoje) energijos kiekiai atitinkamai: $E_{in} = \sum_{i=1}^N m_i v_{in,i}^2 / 2$ ir $E_r = \sum_{i=1}^N m_i v_{r,i}^2 / 2$, čia $v_{in,i}$ ir $v_{r,i}$ pradinis ir likutinis i dalelės greičiai, atitinkamai. Šiame poskyryje skaičiavimo pabaiga yra laiko momentas kai baigiasi paskutinės, t. y. N -sios dalelės kontaktas su prieš paskutine, t. y. $N-1$ dalele. Pradinis energijos kiekis yra lygus smogiančiosios dalelės kinetinei energijai, t. y. $mw_0^2/2$, čia w_0 ir m – pradinis smogiančiosios dalelės greitis ir masė.

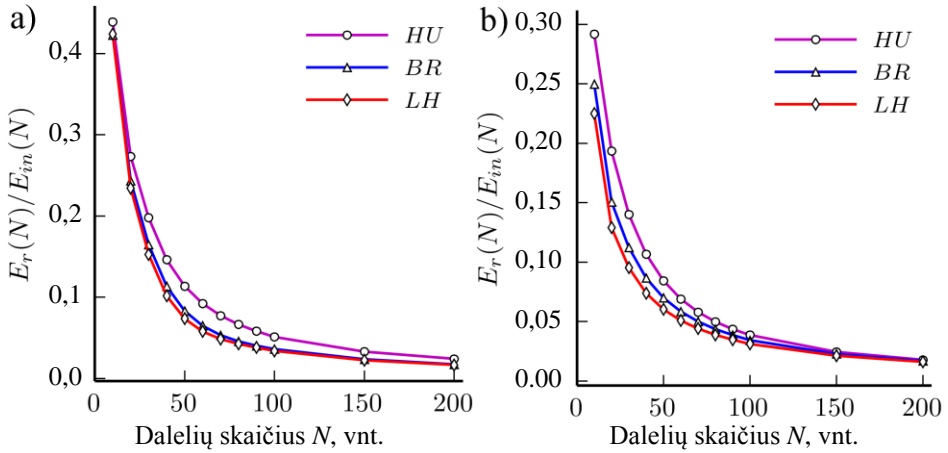
Siekiant apibendrinti visų anksčiau minėtų slopinimo modelių įtaką dalelių sistemų kinetinės energijos sklaidai buvo atlikti energijos nuostolių skaičiavimai taikant dalelių grandinės sudarytas nuo 10 iki 200 identiškų dalelių (2.16 pav.). Grandinių dalelių skaičius N kito kas 10 dalelių, kai $10 \leq N \leq 100$ ir kas 50 dalelių kai $100 \leq N \leq 200$, $i \in \{1, 2, 3, \dots, 12\}$. Iš viso buvo tirta 12 grandinių. Taigi, grandinių dalelių skaičius N gali įgyti reikšmes iš tokios aibės $\mathbb{I} = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 150, 200\}$, t. y. $N \in \mathbb{I}$. Dalelių savybės buvo imamos tokios pat kaip III skaičiavimo atvejo 3 grandinės, žiūr. 2.4 ir 2.5 lentelės. Reikia pažymėti, kad grandinės dalelių skaičius neapima smogiančios dalelės, todėl iš tikrųjų kontaktavo $N+1$ dalelių. Smogiančiosios dalelės savybės buvo tokios pat kaip ir skaičiuojamos grandinės dalelių savybės. Dalelių judėjimas erdvėje buvo neapribotas, skaičiavimo pradžioje dalelės buvo rimties būsenoje.



2.16 pav. Energijos nuostolių tyrimo grandinė

Fig. 2.16. A chain of particles for investigation of the dissipation of the kinetic energy

2.17 paveiksle pavaizduotos skirtingo dalelių skaičiaus grandinių pradinės ir likutinės kinetinės energijos E_r / E_{in} santykiai t. y. $E_r / E_{in} \rightarrow 0$ kai $N \rightarrow \infty$.

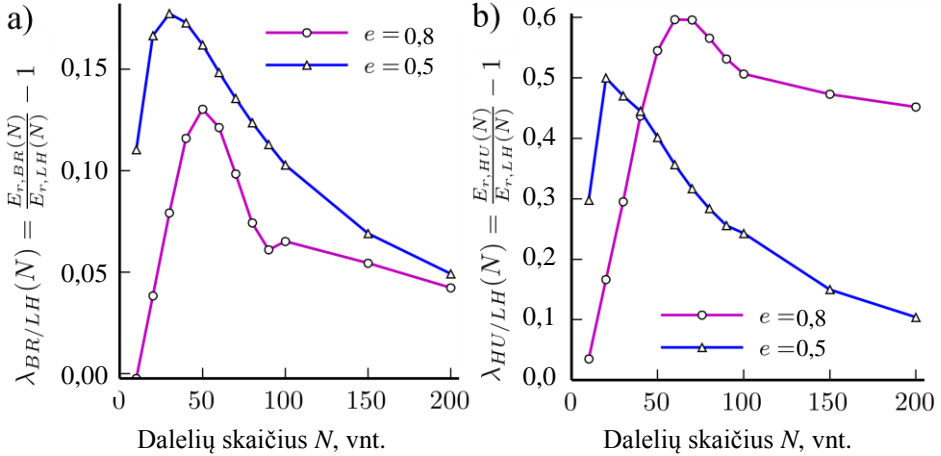


2.17 pav. Skirtingo dalelių skaičiaus grandinių likutinės ir pradinės kinetinės energijos santykiai: a) kai RK $e = 0,8$; b) kai RK $e = 0,5$

Fig. 2.17. Ratios of initial and residual kinetic energies of chains of different numbers of particles: a) when coefficient of restitution $e = 0,8$, and b) when coefficient of restitution $e = 0,5$

2.18 a) ir b) paveiksle pavaizduoti dalelių grandinės santykiniai energijos nuostoliai skaičiavimo pabaigoje: $\lambda_{i/LH}(N) = (E_{r,i}(N) / E_{r,LH}(N) - 1)$, $i \in \{HU, BR\}$, $N \in \mathbb{I}$, čia $E_{r,i}$ ir $E_{r,LH}$ likutinis energijos kiekis skaičiavimo pabaigoje apskaičiuotas taikant i ir LH slopinimo modelius. Kaip matyti iš šio paveikslo visų tirtų grandinių, išskyrus $N = 10$, $\lambda_{i/LH}(N) > 0$, $i \in \{HU, BR\}$, $N \in \mathbb{I} \setminus \{10\}$, todėl, taikant BR ir HU slopinimo modelius galima gauti didesnius energijos nuostolius nei, kad taikant LH modelį. Taip pat iš šio paveikslo matyti, kad $\lambda_{BR/LH}(N) < \lambda_{HU/LH}(N)$, $N \in \mathbb{I}$, todėl tirtų grandinių energijos nuostoliai apskaičiuoti taikant HU slopinimo modelį yra didesni nei, kad taikant BR modelį. Kadangi $\lambda_{BR/LH}(N) < \lambda_{HU/LH}(N)$ ir $\lambda_{i/LH}(N) > 0$, $i \in \{HU, BR\}$, $N \in \mathbb{I} \setminus \{10\}$, tai pasinaudojus $\lambda_{i/LH}(N)$ išraiška $\lambda_{i/LH}(N) = (E_{r,i}(N) / E_{r,LH}(N) - 1)$

galima užrašyti, kad nagrinėtų grandinių $E_{r,HU}(N) > E_{r,BR}(N) > E_{r,LH}(N)$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{10\}$.



2.18 pav. Skirtingo dalelių skaičiaus grandinių likutinės kinetinės energijos santykiniai skirtumai: a) – $(E_{r,BR}(N) / E_{r,LH}(N) - 1)$ ir b) – $(E_{r,HU}(N) / E_{r,LH}(N) - 1)$

Fig. 2.18. Relative differences of residual kinetic energy in chains of different numbers of particles: a) shows $(E_{r,BR}(N) / E_{r,LH}(N) - 1)$ while b) $(E_{r,HU}(N) / E_{r,LH}(N) - 1)$

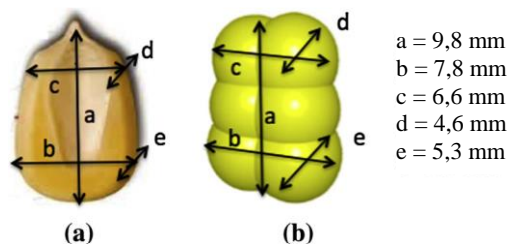
Kai RK $e = 0,8$ didžiausi santykiniai skirtumai $\lambda_{HU/LH}(60) = \max\{\lambda_{HU/LH}(N): N \in \mathbb{N}\} = 0,60$, o $\lambda_{BR/LH}(50) = \max\{\lambda_{BR/LH}(N): N \in \mathbb{N}\} = 0,13$. Kai RK $e = 0,5$ didžiausi santykiniai skirtumai pasikeitė nedaug: $\lambda_{HU/LH}(20) = \max\{\lambda_{HU/LH}(N): N \in \mathbb{N}\} = 0,5$, o $\lambda_{BR/LH}(40) = \max\{\lambda_{BR/LH}(N): N \in \mathbb{N}\} = 0,173$. Iš 2.18 paveikslo gerai matyti, kad $\lambda_{i/LH}(N)$, $N \in \mathbb{N}$, $i \in \{HU, BR\}$ santykiniai skirtumai didėjant kontaktų skaičiui didėja kol pasiekia maksimalias reikšmes, o vėliau mažėja. Palyginus 2.18 a) ir b) paveikslus matome, kad didėjant N santykinis skirtumas $\lambda_{BR/LH}(N)$, kai RK $e = 0,5$ greičiau artėja į $\lambda_{BR/LH}(N)$ kai RK $e = 0,8$ nei kad $\lambda_{HU/LH}(N)$, kai RK $e = 0,5$ į $\lambda_{HU/LH}(N)$ kai RK $e = 0,8$. Šią savybę būtų logiška ekstrapoliuoti ir kai $N \rightarrow \infty$.

2.6. Multisferinės dalelės kontakto parametrų palyginimas

Iki šiol disertacijoje buvo aptarta skirtingų slopinimo modelių įtaka sferinių dalelių elgsenai ir kontakto parametrų. Praktikoje dažnai naudojamos ne tik

sferinės, bet ir multisferinės dalelės. Pastarųjų kontakto modeliavimas atliekamas naudojant tas pačias kontakto jėgų lygtis, todėl yra naudojami tie patys slopinimo modeliai. Šiame poskyryje pateikti kai kurie multisferinės dalelės skaičiavimo rezultatai gauti taikant skirtingus slopinimo modelius: *LH*, *TS*, *BR* ir *HU*. Palyginti pagal šiuos slopinimo modelius apskaičiuoti kukurūzo grūdo aproksimuoto multisferomis kontaktą apibūdinantys dydžiai: persidengimas, kontakto trukmė ir kontakto jėga.

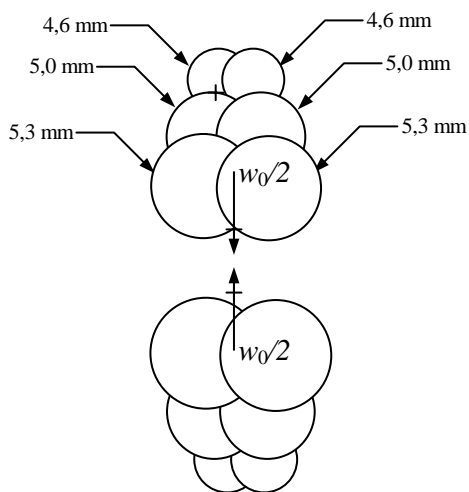
Modeliuojamo kukurūzo grūdo ir medžiagų savybės paimtos iš publikacijos (Markauskas *et al.* 2015). Modeliuojama dalelė sudaryta iš šešių standžiai tarpusavyje sujungtų sferų kurių $RK\ e = 0,2$, tamprumo modulis $E = 300\text{ MPa}$ ir Puasono koeficientas $\mu = 0,4$. Multisferinės dalelės masė yra lygi $m = 2,76 \cdot 10^{-6}\text{ kg}$. Modeliuojamas kukurūzo grūdas ir jo aproksimacija šešiomis skirtingo dydžio dalelėmis parodyti 2.19 ir 2.20 paveiksluose. Multisferinių dalelių pradinis kontakto greitis $w_0 = v_0 = 1,0\text{ m/s}$. Multisferinės dalelės erdvėje orientuotos taip, kad kontakto metu susidarytu tik normalinė sąveika, t. y. nėra tangentinės sąveikos, riedėjimo sąveikos ir kontakto metu taip pat nesusidaro sukimo momentas.



2.19 pav. Kukurūzo grūdo aproksimavimas multisferine dalele:

a) kukurūzo grūdas; b) grūdo aproksimacija šešiomis skirtingų skersmenų dalelėmis

Fig. 2.19. Maize grain approximation by multispherical particle: a) maize grain; b) grain approximation by six spheres of the different diameters



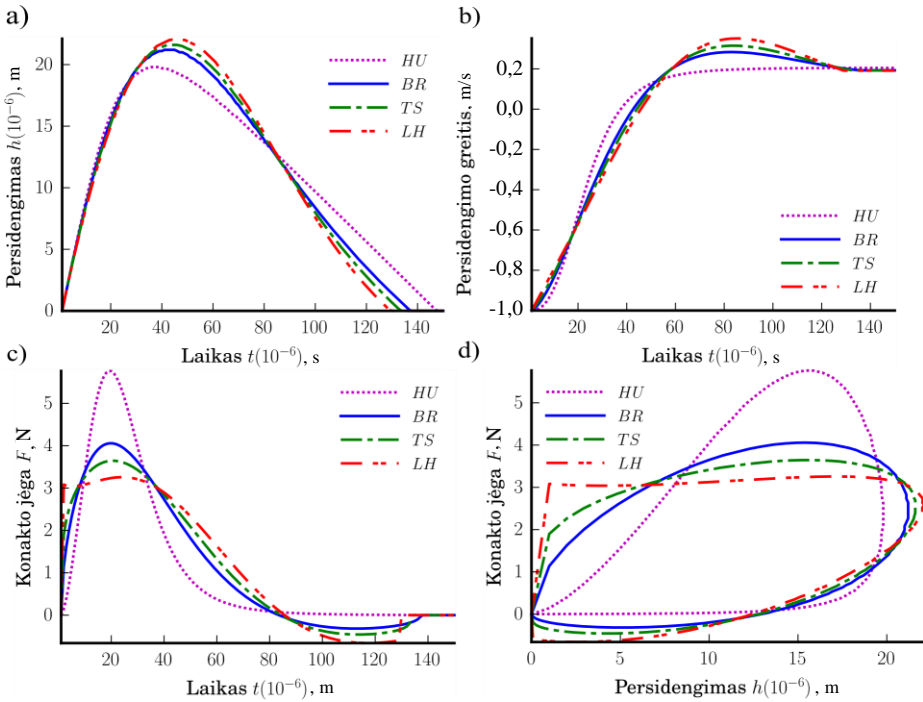
2.20 pav. Multisferinių dalelių kontakto schema
Fig. 2.20. Scheme of contact of multisphere particles

Pagrindiniai kontaktų parametrai apskaičiuoti pagal *LH*, *TS*, *BR* ir *HU* metodikas pavaizduoti 2.21 paveiksle, o didžiausios kontakto parametrų reikšmės duotos 2.6 lentelėje.

2.6 lentelė. Multisferinės dalelės modeliavimo rezultatai

Table 2.6. Multispherical particles simulation results

Klapiatampraus slopinimo modelio žymuo	Didžiausias persidengimas h_{max} , 10^{-6} m	Kontakto trukmė ΔT , 10^{-4} s	Didžiausia kontakto jėga F_{max} , N
<i>LH</i>	2,21	1,29	3,26
<i>TS</i>	2,16	1.32	3,65
<i>BR</i>	2,12	1,37	4,59
<i>HU</i>	1,98	1,44	5,76



2.21 pav. Modeliuojamos multisferinės dalelės skirtingų slopinimo modelių kontaktų parametrai: a) ir b) – persidengimo h ir jo $dh(t)/dt$ priklausomybės nuo laiko t ; c) ir d) – kontakto jėgos F priklausomybės nuo laiko t ir nuo persidengimo h , atitinkamai

Fig. 2.21. The dependencies of the contact parameters of the multispherical particle obtained by using different damping models: a) and b) are overlap h and its velocity $dh(t)/dt$ versus time t ; c) and d) are contact force versus time and overlap, respectively

Analizuojant skaičiavimų rezultatus galima matyti, kad multisferinės ir sferinės dalelių kontakto parametrų priklausomybės nuo laiko yra panašios, žiūrėti 2.4.2 poskyrį ir 2.7 paveikslą. Kadangi modeliuotos multisferinės dalelės RK e reikšmė yra maža ($e = 0,2$) tai, atsirandantys kontakto parametrų skirtumai yra ženklūs (konkrečios reikšmės pateiktos 2.6 lentelė). Apibendrinat 2.4.2 ir 2.6 poskyrių modeliavimo rezultatus galima teigti, kad skirtingi slopinimo modeliai vienodai įtakoja sferinių ir multisferinių dalelių normalinį kontaktą, tačiau skirtumų tarp kontakto parametrų absoliutinis dydis gali būti skirtingas.

2.7. Antrojo skyriaus išvados

1. Daugumą diskrečiųjų elementų metodo klampiatampraus slopinimo modelių galima išreikšti viena bendra nedimensine išraiška leidžiančia suvienodinti slopinimo parametrų parinkimo tvarką.
2. Atlikta skirtingų slopinimo modelių skaitinė analizė parodė, kad su tuo pačiu restitucijos koeficientu gaunami skirtingi kontaktą apibūdinantys dydžiai: persidengimas, kontakto trukmė ir normalinės sąveikos jėga.
3. Skirtumas tarp skirtingų modelių persidengimo, kontakto trukmės ir normalinės sąveikos jėgos didėja mažėjant restitucijos koeficientui. Todėl, esant labai mažoms restitucijos koeficiento reikšmėms taikomo modelio pasirinkimas yra labai aktualus.
4. Netiesiniai klampiatampraus slopinimo modeliai sudaryti iš netiesinės tamprios sąveikos (Herco) ir netiesinės klampios sąveikos modelių yra ženkliai artimesni eksperimentiniams rezultatams nei tiesinis klampiatampraus slopinimo modelis sudarytas iš tiesinių tamprios ir klampiatamprės sąveikos modelių.
5. Netiesinių klampiatampraus slopinimo modelių naudojimas dalelių sistemų modeliavimui nereikalauja ženkliai daugiau kompiuterinių resursų lyginant su tiesinių klampiatampraus slopinimo modelių taikymu. Todėl tiesinių klampiatampraus slopinimo modelių taikymas nėra geriausias pasirinkimas dalelių sistemų modeliavimui.
6. Disertacijoje nagrinėti klampiatampraus slopinimo modeliai gali būti pritaikyti dalelių sistemų (su kintamomis dalelių restitucijos koeficiento reikšmėmis, tame tarpe ir kai restitucijos koeficientas priklauso nuo pradinio kontakto greičio) skaičiavimui, parinkus tokį nedimensinį slopinimo koeficientą kuris atitinka nustatytą restitucijos koeficientą.
7. Nustatyta, kad skirtingų klampiatampraus slopinimo modelių dalelių linijiniai greičiai ir kontakto jėgos labiausiai skiriasi dalelių greičio bangos zonoje. Jau kontaktavusių dalelių linijinis greitis nepriklauso nuo klampiatampraus slopinimo modelio ir nuo restitucijos koeficiento.
8. Daugelio dalelių sistemų, kai dalelės kontaktuoja daug kartų, energijos nuostoliai apskaičiuoti taikant skirtingus klampiatampraus

slopinimo modelius skirsis nedaug, lyginant su visos sistemos likutine energija.

9. Jeigu dalelių sistemoje dalelių poslinkiai yra nedideli, o kontaktų įvyksta daug, tuomet skirtumai tarp skaičiavimo rezultatų gautų naudojant skirtingus klampiatampraus slopinimo modelius yra nereikšmingi.
10. Bendruoju atveju negalima pasakyti koks esantis klampiatampraus slopinimo modelis yra geriausias. Kiekvienu konkrečiu skaičiavimo atveju reikia parinkti tinkamiausią klampiatampraus slopinimo modelį.

Apibendrintas slopinimo modelis ir jo parametrų apskaičiavimo metodika

Kaip parodyta ankstesniuose skyriuose, taikant esamus DEM slopinimo modelius daugelio dalelių sistemoms, apskaičiuotos RK e reikšmės gali smarkiai skirtis nuo eksperimentiškai nustatyto RK e_{exp} ar užsiduotų ar reikalingų RK e reikšmių. Tačiau, modeliuojamos sistemos dalelių RK e turi atitikti užsiduotas RK e reikšmes. Šiuo atveju, esamų slopinimo modelių, HU , BR , TS , LH ir LS , taikymui reikia žinoti parametrą v_0 . Tuo atveju, kai vienu metu kontaktuoja tik dvi dalelės nuo pat kontakto pradžios iki pabaigos, esamų slopinimo modelių parametras v_0 gali būti imamas kaip pradinis kontakto greitis w_0 , t. y. $v_0 = w_0$. Taikant esamus slopinimo modelius su $v_0 = w_0$ reikšme gaunama, kad paskaičiuotas RK e_{calc} lygus užsiduotam RK e , t. y. $e_{calc} = e$. Daugelio dalelių sistemoje vienu metu kontaktuoja trys ar daugiau dalelių. Dėl kitų dalelių poveikio dviejų nagrinėjamų dalelių kontaktui imti, kad $v_0 = w_0$ bendroju atveju negalima, nes kitų, pašalinių dalelių įtaka gali visiškai pakeisti nagrinėjamų dalelių elgseną kontakto metu. Šiuo atveju, apskaičiuota nagrinėjamų dalelių elgsena imant $v_0 = w_0$ skirsis nuo realios elgsenos. Kitaip sakant, kai vienu metu kontaktuoja daugiau nei dvi dalelės, tuomet dviejų nagrinėjamų dalelių įtaka viena kitai priklauso ne nuo to kokių pradiniu greičiu w_0 dalelės kontaktavo viena su kita, bet ir nuo kitų su šiomis dalelėmis kontaktuojančių dalelių. Esami slopinimo modeliai į tai neatsižvelgia, nes parametras v_0 nepriklauso nuo kitų dalelių poveikio, nes v_0 nepriklauso nei nuo persidengimo h , nei jo greičio

$dh(t)/dt$. Būtent kitos kontaktuojančios dalelės ir veikia nagrinėjamų dalelių h ir $dh(t)/dt$.

Skaičiavimo patirtis parodė, kad galima parinkti tokį koeficientą β , kad apskaičiuotas RK e_{calc} būtų apytiksliai lygus reikalingam arba užsiduotam RK e tam tikrame $[w_{0,min}, w_{0,max}]$ intervale su tuo pačiu v_0 parametru (vadinasi ir su tuo pačiu $c(e(v_0))$), t. y. $e_{calc}(w_0) \approx e(w_0)$ kai $v_0(w_0) = const$ su $w_0 \in [w_{0,min}, w_{0,max}]$. Reikia pabrėžti, kad kai $v_0(w_0) = const$, tuomet nedimensinis slopinimo koeficientas $c(e(v_0))$ irgi yra pastovus dydis užsiduotame pradinio greičių intervale.

Kitaip sakant, į kitų dalelių įtaką dviejų nagrinėjamų dalelių elgsenai kontakto metu būtų atsižvelgiama tik h^β dydžiu, o nedimensinis slopinimo koeficientas c ir koeficientas β galėtų būti traktuojami kaip medžiagos klampiatampres savybės apibūdinančios konstantos, nepriklausančios nuo pradinio kontakto greičio w_0 , tačiau priklausančios nuo pradinio greičio intervalo $w_0 \in [w_{0,min}, w_{0,max}]$ ir reikalingos RK e funkcijos reikšmių šiame intervale, arba kitaip sakant nuo dalelių slopinimo savybių. Šiuo atveju galima taikyti vieną v_0 reikšmę ir vieną nedimensinio slopinimo koeficiento c reikšmę visai dalelių sistemai. Tai žymiai palengvina skaičiavimus.

Šiame skyriuje siūlomas naujas sukurtas DEM tinkantis slopinimo modelis kuriuo galima tiksliau atsižvelgti į kitų dalelių poveikį nagrinėjamų dalelių elgsenai. Teorinių ir eksperimentinių restitucijos koeficientų palyginimas parodė pakankamai gerą tarpusavio atitikimą, todėl taikant siūlomą metodiką galima žymiai tiksliau modeliuoti dalelių sistemas. Skyriuje pateikta medžiaga publikuota straipsnyje (Kačianauskas *et al.* 2016).

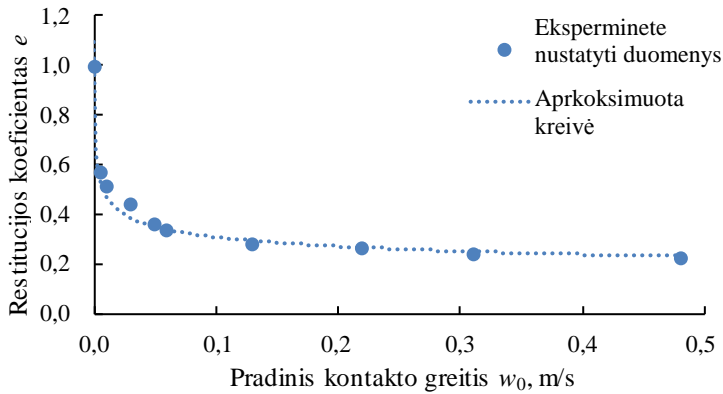
3.1. Pagrindinės priklausomybės

Kaip jau minėta 1 skyriuje, RK priklauso nuo pradinio kontakto greičio. Kai kurių medžiagų RK didėjant pradiniam kontakto greičio w_0 mažėja labai smarkiai (3.1 pav.). Todėl svarbu parinkti tokius judėjimo lygčių parametrus kad paskaičiuotas RK e būtų artimas eksperimentiškai nustatytam.

$C(h(t))$ slopinimo funkcijos, (2.16) formulė, nedimensinis slopinimo koeficientas c gali būti rastas minimizuojant RK e paklaidą:

$$\min \rightarrow d(e_{exp}, e_{calc}), \quad (3.1)$$

čia e_{exp} ir e_{calc} – eksperimentiškai nustatytas ir apskaičiuotas RK, $d(\cdot, \cdot)$ – norma.



3.1 pav. Švino dalelės restitucijos koeficiento priklausomybė nuo pradinio kontakto greičio pagal (Goldsmith 1960), ir jo aproksimacija:

$$e(w_0) = 0,2051 w_0^{-0,181}$$

Fig. 3.1. Dependency of coefficient of restitution of lead on initial velocity of a contact according to (Goldsmith 1960), and its approximation

$$e(w_0) = 0,2051 w_0^{-0,181}$$

Kaip žinoma funkcijos gali būti aproksimuotos taikant įvairias normas. Dažniausiai yra taikomos šios normos:

$$d_{\infty}(e_{exp}, e_{calc}) = \max\{|e_{exp}(w_0) - e_{calc}(w_0)|, w_0 \in [w_{0,1}, w_{0,2}]\}, \quad (3.2)$$

$$d_p(e_{exp}, e_{calc}) = \left(\int_{w_{0,1}}^{w_{0,2}} (e_{exp}(w_0) - e_{calc}(w_0))^p dw_0 \right)^{1/p}, \quad (3.3)$$

čia $w_{0,1}$ ir $w_{0,2}$ – pasirinkti mažiausias ir didžiausias pradinio kontakto greitis. Kai $p = 2$, tuomet (3.3) formulė atitinka mažiausių kvadratų metodą. Mažiausias pradinis kontakto greitis $w_{0,1}$ gali būti prilygintas 0, t. y. $w_{0,1} = 0$, tuo tarpu didžiausias kontakto greitis $w_{0,2}$ iš anksto negali būti apibrėžtas. Šį greitį turėtų parinkti modeliuotojas remiantis iš anksto žinoma informacija arba patirtimi. Dažniausiai žinomas tik baigtinis eksperimentiškai nustatytų RK e_{exp} taškų skaičius. Tuomet, (3.2) ir (3.3) formulėse vietoje RK e_{exp} galima naudoti jo aproksimaciją RK \hat{e}_{exp} kuri yra apibrėžta pasirinktame intervale $[w_{0,1}, w_{0,2}]$.

Kontaktuojančių kūnų suartėjimo metu, t. y. nuo laiko momento t_0 kai dalelės susiliečia iki $h = h_{max}$ arba kai $t \in [t_0, t_0 + \Delta T_{app}]$, energijos sklaida gali būti apskaičiuota taip:

$$\bar{E}_d = \bar{E}_k - \bar{E}_p. \quad (3.4)$$

Taikant nedimensinę analizę nedimensinis parametras $\bar{v}_0 = 1,0$ ir nedimensinė dalelės masė $\bar{m} = 1,0$. Tuomet, nedimensinės kinetinė ir potencinė energijos yra tokios: $\bar{E}_k = 1/2$ ir $\bar{E}_p = \bar{h}_{max}^{5/2}/2$ ir nedimensinės slopinimo energijos \bar{E}_d išraišką (3.4) galima užrašyti taip:

$$\bar{E}_d = \frac{1 - \bar{h}_{max}^{5/2}}{2}. \quad (3.5)$$

Nedimensinę slopinimo energiją \bar{E}_d taip pat galima išreikšti kaip slopinimo jėgos darbą atliktą dalelei pasislenkant nuo 0 iki didžiausio santykinio persidengimo \bar{h}_{max} :

$$\bar{E}_d = \int_0^{\bar{h}_{max}} \bar{F}_d(\bar{h}) d\bar{h}. \quad (3.6)$$

Į (3.6) įrašius nedimensinės slopinimo jėgos $\bar{F}_d(\bar{h})$ (2.19) išraišką gaunamas toks integralas:

$$\bar{E}_d = \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{2}{5}(1+\beta)} \int_0^{\bar{h}_{max}} c(e(v_0)) \bar{h}^\beta \frac{d\bar{h}(\bar{t})}{d\bar{t}}(\bar{h}) d\bar{h}, \quad (3.7)$$

čia $d\bar{h}(\bar{t})/d\bar{t}(\bar{h})$ reikia suprasti kaip santykinio persidengimo greičio $d\bar{h}(\bar{t})/d\bar{t}$ priklausomybę nuo santykinio persidengimo \bar{h} .

Deja, (3.7) lygtis negali būti išreikšta elementariomis funkcijomis, todėl tolimesniuose skaičiavimuose pasinaudojama santykinio didžiausio persidengimo \bar{h}_{max} aproksimacija nuo RK $e - \bar{h}_{max}(e)$ ir santykinio kontakto greičio $d\bar{h}(\bar{t})/d\bar{t}$ aproksimacija nuo RK e ir santykinio persidengimo $\bar{h} - \hat{d\bar{h}(\bar{t})/d\bar{t}}(\bar{h}, e) \equiv \hat{v}_c(\bar{h}, e)$. Šios aproksimacijos randamos sprendžiant nedimensinę (2.18) judėjimo lygtį, kai RK $e \in [0,2, 1,0]$, o koeficientas $\beta \in [0,0, 1,5]$.

Išanalizavus daugelį skaičiavimų nustatyta, kad santykinis kontakto greitis $d\bar{h}(\bar{t})/d\bar{t}$ gali būti aproksimuotas tokia aproksimacija

$$\hat{v}_c(\bar{h}, e) = \frac{\hat{d\bar{h}(\bar{t})}}{d\bar{t}}(\bar{h}, e) = a(e) \bar{h}^{b(e)} + 1, \quad (3.8)$$

čia $a(e)$ ir $b(e)$ funkcijos yra tokios:

$$a(e) = 1,275 \ln(e) - 0,82, \quad (3.9)$$

$$b(e) = 1,53e + 2,0. \quad (3.10)$$

Irašius (3.9), (3.10) į (3.8) gauname:

$$\hat{v}(\bar{h}) = (1,275 \ln(e) - 0,82) \bar{h}^{1,53e+2} + 1. \quad (3.11)$$

Santykinis didžiausias persidengimas \bar{h}_{max} gali būti aproksimuotas taip:

$$\hat{\bar{h}}_{max}(e) = 0,48e + 0,529. \quad (3.12)$$

Irašius (3.11) į (3.7) ir suintegravus gauname tokią nedimensinių energijos nuostolių \bar{E}_d išraišką:

$$\bar{E}_d = \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{2}{5}(1+\beta)} c(e(v_0)) \left(\left(\frac{1,275 \ln(e) - 0,82}{1,53e + 3 + \beta} \right) \bar{h}_{max}^{1,53e+3+\beta} + \frac{\bar{h}_{max}^{\beta+1}}{\beta+1} \right). \quad (3.13)$$

Irašius gautą nedimensinių energijos nuostolių \bar{E}_d (3.13) išraišką į (3.5) formulę gauname tokią lygybę:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{2}{5}(1+\beta)} c(e(v_0)) \left(\left(\frac{1,275 \ln(e) - 0,82}{1,53e + 3 + \beta} \right) \bar{h}_{max}^{1,53e+3+\beta} + \frac{\bar{h}_{max}^{\beta+1}}{\beta+1} \right) = \\ & = \frac{1 - \bar{h}_{max}^{5/2}}{2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Iš šios lygybės išsireiškiame nedimensinį slopinimo koeficientą c :

$$\begin{aligned} c(e(v_0)) & \approx \hat{c}(e(v_0)) = \\ & = \frac{1 - \bar{h}_{max}^{5/2}}{2 \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{2}{5}(1+\beta)} \left(\left(\frac{1,275 \ln(e(v_0)) - 0,82}{1,53e(v_0) + 3 + \beta} \right) \bar{h}_{max}^{1,53e(v_0)+3+\beta} + \frac{\bar{h}_{max}^{\beta+1}}{\beta+1} \right)}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Reikia pabrėžti, kad gauta (3.15) išraiška gauta remiantis nedimensinio kontakto greičio $\bar{v}(\bar{h})$ aproksimacija $\hat{\bar{v}}(\bar{h})$, (3.11) lygtis, todėl pagal (3.15) formulę galima apskaičiuoti tik nedimensiniai slopinimo koeficientai c apytikslę reikšmę \hat{c} . Todėl toliau visur tekste pagal (3.15) formulę apskaičiuotas nedimensinis slopinimo koeficientas žymimas \hat{c} .

Į (3.15) įrašius (3.12) gauname tokią nedimensinio slopinimo koeficiento išraišką:

$$\hat{c}(e(v_0), \beta) = \frac{0,5(5/4)^{-\frac{2}{5}(1+\beta)} \left(1 - (0,48e(v_0) + 0,529)^{5/2}\right)}{\left(\frac{1,275 \ln(e(v_0) - 0,82)}{1,53e(v_0) + 3 + \beta}\right) (0,48e(v_0) + 0,529)^{1,53e(v_0) + 3 + \beta} + \frac{(0,48e(v_0) + 0,529)^{\beta+1}}{\beta+1}}. \quad (3.16)$$

Kaip galima matyti iš (3.16) formulės nedimensinis slopinimo koeficientas $c(e, \beta)$ priklauso nuo β ir RK e . Taikant eksperimentiškai nustatytą RK e (3.16) formulėje praktiška imti RK e aproksimaciją \hat{e} . Suprantama, kad (3.16) formulėje galima taikyti pasirinktą teorinę RK e priklausomybę. (3.16) lygybei taikant atitinkamas β reikšmes pateiktas 2.1 lentelėje galima apskaičiuoti atitinkamų slopinimo modelių nedimensinius slopinimo koeficientus: c_{LS} , c_{TS} , c_{LH} , c_{BR} ir c_{HU} . Jeigu RK e priklauso nuo pradinio kontakto greičio w_0 , t. y. $e(w_0)$ tuomet ir c priklausys nuo w_0 .

(3.16) formulėje vis dar yra vienas nežinomasis – β koeficientas kuris gali būti nustatytas taikant anksčiau minėtas $d_\infty(e_{calc}, e_{exp})$ ir $d_p(e_{calc}, e_{exp})$ normas pateiktas (3.2) ir (3.3) formulėse. Reikia pabrėžti, kad parinktas β (3.16) formulės koeficientas β turi būti taikomas slopinimo funkcijai $C(h)$, (2.16) formulė, ir nedimensinei, (2.18) formulė, ir dimensinei, (1.12) formulė, lygtims. Toliau pateikiama koeficiento β parinkimo metodiką.

3.1.1. Klampiatampraus slopinimo modelio parametrų parinkimo metodika

Gauta (3.16) nedimensinio slopinimo koeficiento išraiška gali būti panaudota nuo pradinio kontakto greičio priklausančiam RK e apskaičiavimui neintegruojant (2.18) ir (1.12) judėjimo lygčių, t. y. $e(w_0)$ reikšmių radimui. Šiam tikslui nustatomas nedimensinių slopinimo koeficientų $c(e, \beta, v_{0,1})$ ir $c(e, \beta, v_{0,2})$ atitinkančių pradinius kontakto greičius $v_{0,1}$ ir $v_{0,2}$, $v_{0,1} \neq v_{0,2}$ sąryšis. Į (1.12) įrašius (2.16) formulę gaunama:

$$m_i \frac{d^2 h(t)}{dt^2} + c(e(v_0), \beta) m_{eff}^{\left(\frac{3-2\beta}{5}\right)} v_0^{\left(\frac{1-4\beta}{5}\right)} K_n^{\left(\frac{2+2\beta}{5}\right)} h^\beta(t) \frac{dh(t)}{dt} + K_n h^{3/2}(t) = 0. \quad (3.17)$$

$v_{0,1}$ ir $v_{0,2}$ pradinius kontakto greičius ir įrašius juos į (3.17) lygtį gauname dvi lygtis kurios gali skirtis tiek β , e ir v_0 , t. y. $c(v_{0,1})$ ir $c(v_{0,2})$ nariais:

$$\begin{aligned}
m_i \frac{d^2 h(t)}{dt^2} + c(e(v_{0,1}), \beta_1) m_{eff}^{\left(\frac{3-2\beta_1}{5}\right)} v_{0,1}^{\left(\frac{1-4\beta_1}{5}\right)} K_n^{\left(\frac{2+2\beta_1}{5}\right)} h^{\beta_1}(t) \frac{dh(t)}{dt} + K_n h^{3/2}(t) &= 0, \\
m_i \frac{d^2 h(t)}{dt^2} + c(e(v_{0,2}), \beta_2) m_{eff}^{\left(\frac{3-2\beta_2}{5}\right)} v_{0,2}^{\left(\frac{1-4\beta_2}{5}\right)} K_n^{\left(\frac{2+2\beta_2}{5}\right)} h^{\beta_2}(t) \frac{dh(t)}{dt} + K_n h^{3/2}(t) &= 0.
\end{aligned} \quad (3.18)$$

Sulyginus (3.18) lygtis ir sutraukus panašius narius gaunamos tokios lygybės:

$$c(e(v_{0,2}), \beta_2) v_{0,2}^{(1-4\beta_2)/5} = c(e(v_{0,1}), \beta_1) v_{0,1}^{(1-4\beta_1)/5}. \quad (3.19)$$

Jeigu imti, kad $c(e(v_0), \beta) \equiv \hat{c}(e(v_0), \beta)$, tuomet (3.19) gali būti perrašyta taip:

$$\hat{c}(e(v_{0,2}), \beta_2) v_{0,2}^{(1-4\beta_2)/5} = \hat{c}(e(v_{0,1}), \beta_1) v_{0,1}^{(1-4\beta_1)/5}. \quad (3.20)$$

Ši išraiška toliau ir bus naudojama tolimesniuose skaičiavimuose.

Laisvai pasirinkus $v_{0,1}$, β_1 , β_2 ir pagal (3.16) formulę apskaičiavus $\hat{c}(e(v_{0,1}), \beta_1)$ o vietoje $\hat{c}(e(v_{0,2}), \beta_2)$ įrašius (3.16) formulę gaunama netiesinė lygtis kurią skaitiškai išsprendus randamas RK $e(v_{0,2})$ atitinkantis pasirinktus $v_{0,1}$, $v_{0,2}$, β_1 ir β_2 .

(3.20) lygtį galima perrašyti tolimesniems skaičiavimo aiškinimui patogesniu pavidalu. Tam reikalui imame, kad (3.20) lygtyje $v_{0,2} \equiv w_0$ ir $v_{0,1} \equiv v_0$, tuomet šią lygtį perrašome taip:

$$f(e(w_0), w_0, v_0, \beta_1, \beta_2) = \hat{c}(e(w_0), \beta_2) - \hat{c}(e(v_0), \beta_1) \frac{(v_0)^{\left(\frac{1-4\beta_1}{5}\right)}}{(w_0)^{\left(\frac{1-4\beta_2}{5}\right)}} = 0. \quad (3.21)$$

Kai $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, tuomet (3.21) gali būti perrašyta taip:

$$f(e(w_0), w_0, v_0, \beta) = \hat{c}(e(w_0), \beta) - \hat{c}(e(v_0), \beta) \left(\frac{v_0}{w_0} \right)^{\left(\frac{1-4\beta}{5}\right)} = 0. \quad (3.22)$$

Praktiniams taikymams pakanka (3.22) lygties. Todėl tolimesniuose aiškinimuose, kaip gali būti parinktos β ir v_0 reikšmės, naudojama tik viena (3.22) lygtį. (3.22) lygties sprendinys bus žymimas $\hat{e}_{calc}(v_0, w_0, \beta)$ kadangi jis gaunamas sprendžiant (3.22) lygtį ir priklauso nuo β , w_0 ir v_0 :

$$\{e: f(e(w_0), w_0, v_0, \beta) = 0\} \in \hat{e}_{calc}(v_0, w_0, \beta). \quad (3.23)$$

β ir v_0 parinkimui reikia turėti RK e funkciją nuo pradinio kontakto greičio w_0 . Tikrovėje tai būtų eksperimentinius duomenis aproksimuojanti funkcija arba kitaip sakant empirinė funkcija $e_{exp}(w_0)$. Pagal pasirinktas β ir $v_0 \in [w_{0,min}, w_{0,max}]$ reikšmes apskaičiuojama $e_{exp}(v_0)$ ir pagal (3.16) formulę, imant kad $e(v_0) \equiv e_{exp}(v_0)$, paskaičiuojama nedimensinės slopinimo koeficientai $\hat{c}(e_{exp}(v_0), \beta)$ reikšmė. Toliau pasirenkama w_0 reikšmė ir skaitiškai sprendžiant (3.22) lygtį

randama RK $\hat{e}_{calc}(v_0, w_0, \beta)$ reikšmė atitinkanti ir iš anksto užsiduotą β , w_0 ir v_0 . Toliau lyginamos $e_{exp}(w_0)$ ir $\hat{e}_{calc}(v_0, w_0, \beta)$ reikšmės. Skaičiavimo tikslas – rasti tokias β ir $v_0 \in [w_{0,min}, w_{0,max}]$ reikšmes, kad $\hat{e}_{calc}(w_0, \beta)$ paklaida $e_{exp}(w_0)$ atžvilgiu būtų kuo mažesnė. Kaip jau minėta anksčiau, $\hat{e}_{calc}(v_0, w_0, \beta)$ paklaida $e_{exp}(w_0)$ atžvilgiu gali būti įvertinta minėtomis $d_\infty(\hat{e}_{calc}, e_{exp})$ ir $d_p(\hat{e}_{calc}, e_{exp})$ normomis duotomis (3.2) ir (3.3) formulėse. Tolimesniuose skaičiavimuose priimama, kad $d_p(\hat{e}_{calc}, e_{exp})$ normomis apibrėžta (3.3) formule $p = 2$, todėl visur toliau taikoma $d_2(\hat{e}_{calc}, e_{exp})$ norma:

$$d_\infty(\hat{e}_{calc}(v_0, w_0, \beta), e_{exp}(w_0)) = \max\{|\hat{e}_{calc}(v_0, w_0, \beta) - e_{exp}(w_0)|, w_0 \in [w_{0,min}, w_{0,max}]\}, \quad (3.24)$$

$$d_2(\hat{e}_{calc}(v_0, w_0, \beta), e_{exp}(w_0)) = \left(\int_{w_{0,min}}^{w_{0,max}} (e_{exp}(w_0) - \hat{e}_{calc}(v_0, w_0, \beta))^2 dw_0 \right)^{1/2}. \quad (3.25)$$

Iš esmės β ir $v_0 \in [w_{0,min}, w_{0,max}]$ reikšmių radimas yra optimizavimo arba funkcijų aproksimavimo uždavinys kuris gali būti suformuluotas taip: reikia surasti tokias $\beta^* \in [\beta_{min}, \beta_{max}]$ ir $v_0^* \in [v_{0,min}, v_{0,max}]$ reikšmes, kad jos atitiktų tokią sąlygą:

$$\begin{aligned} d_i(\hat{e}_{calc}(v_0^*, w_0, \beta^*), e_{exp}(w_0)) &= \\ &= \min\{d_i(\hat{e}_{calc}(v_0, w_0, \beta), e_{exp}(w_0)) : \beta \in [\beta_{min}, \beta_{max}], \\ &v_0 \in [v_{0,min}, v_{0,max}], w_0 \in [w_{0,min}, w_{0,max}]\}, \quad i \in \{\infty, 2\}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

čia β_{min} ir β_{max} imami pagal (3.16) formulės sudarymui parinktą $\beta \in [0,0, 1,5]$ intervalą. Todėl $\beta_{min} = 0,0$, o $\beta_{max} = 1,5$. $v_{0,min}$ ir $v_{0,max}$ reikšmės gali būti pasirenkamos laisvai arba pagal pasirinktą pradinio kontakto greičio kitimo intervalą. T. y. pagal $e_{exp}(w_0)$ apibrėžimo sritį $[w_{0,min}, w_{0,max}]$. Bet kokiu atveju $[v_{0,min}, v_{0,max}] \subseteq [w_{0,min}, w_{0,max}]$. Tuo atveju kai $[v_{0,min}, v_{0,max}] = [w_{0,min}, w_{0,max}]$ $v_{0,min} = w_{0,min}$, $v_{0,max} = w_{0,max}$. Toliau šiame tekste β^* ir v_0^* reikšmės nustatytos taikant $d_\infty(\hat{e}_{calc}, e_{exp})$ normą bus žymimos β_∞^* ir $v_{0,\infty}^*$, o taikant $d_2(\hat{e}_{calc}, e_{exp})$ normą – β_2^* ir $v_{0,2}^*$.

Paprastiau β ir $v_0 \in [w_{0,min}, w_{0,max}]$ reikšmės galima nustatyti iš anksto pasirenkant tam tikrą v_0 reikšmę, pavyzdžiui $v_0 = (w_{0,min} + w_{0,max})/2$, ir β^* koeficientas ieškomas pagal tokią sąlygą:

$$\begin{aligned}
d_i \left(\hat{e}_{calc} (v_0, w_0, \beta^*), e_{exp} (w_0) \right) &= \\
= \min \left\{ d_i \left(\hat{e}_{calc} (v_0, w_0, \beta), e_{exp} (w_0) \right) : \beta \in [\beta_{min}, \beta_{max}] \right\}, & \quad (3.27) \\
w_0 \in [w_{0,min}, w_{0,max}] \}, & \quad i \in \{\infty, 2\}.
\end{aligned}$$

Rastus β^* ir v_0^* koeficientus galima tiesiogiai taikyti dalelių sistemos modeliavimui. Reikia pabrėžti, kad (3.16) išraiška gauta kai RK $e \in [0,2, 1,0]$, o koeficientas $\beta \in [0,0, 1,5]$. Tačiau galima imti ir kitas RK e ir β reikšmes, tiesiog galima gauti mažiau tiksliai nedimensinio slopinimo koeficiento c reikšmes.

3.1.2. 3.22 lygties skaitinis sprendimas ir slopinimo modelio parametrų parinkimo algoritmas

(3.22) lygtis, kartu su (3.16) formule, yra netiesinė β ir v_0 atžvilgiu. Todėl ją spręsti patogiau skaitiškai. Vienas iš tokių būdų – Niutono metodas pagal kurį šaknis skaičiuojama taip:

$$\hat{e}_{calc,n+1}(v_0, w_0, \beta) = \hat{e}_{calc,n}(v_0, w_0, \beta) - \frac{f(\hat{e}_{calc,n}(v_0, w_0, \beta), w_0, v_0, \beta)}{f'(\hat{e}_{calc,n}(v_0, w_0, \beta), w_0, v_0, \beta)}, \quad (3.28)$$

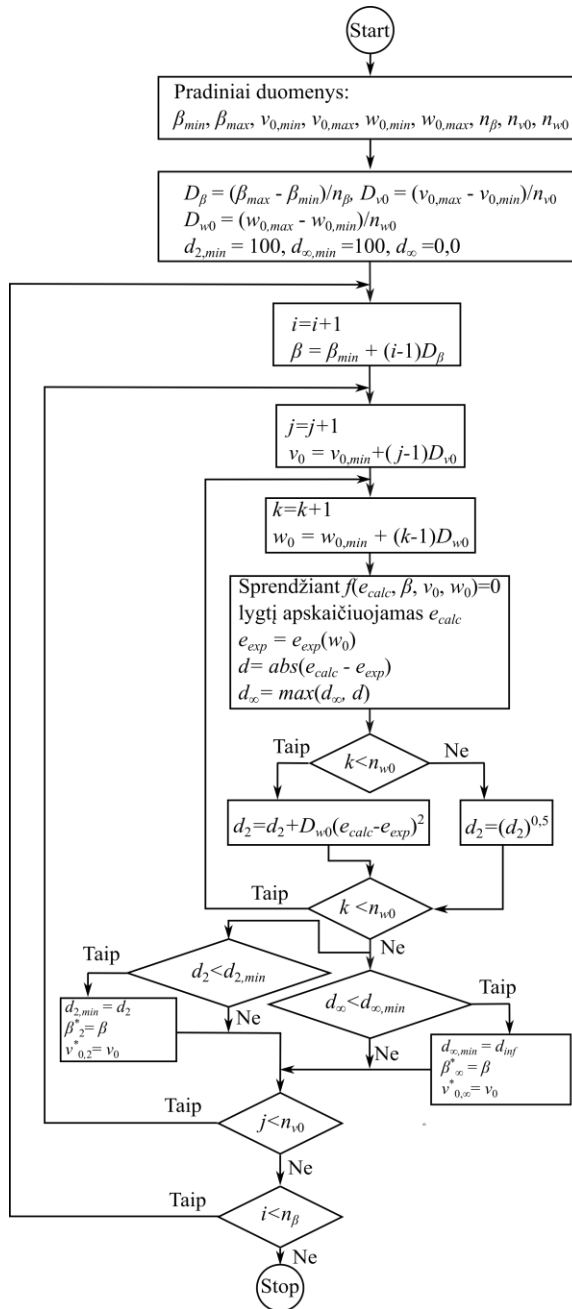
Čia $f(\hat{e}_{calc,n}(v_0, w_0, \beta), w_0, v_0, \beta)$ pateiktas (3.22) formulėje, o $f'(\hat{e}_{calc,n}(v_0, w_0, \beta), w_0, v_0, \beta)$ yra $f(\hat{e}_{calc,n}(v_0, w_0, \beta), w_0, v_0, \beta)$ dalinės išvestinės reikšmė kai $\hat{e}_{calc}(v_0, w_0, \beta) = \hat{e}_{calc,n}(v_0, w_0, \beta)$:

$$f'(\hat{e}_{calc,n}(v_0, w_0, \beta), \beta) = \frac{\partial f(\hat{e}_{calc}(v_0, w_0, \beta), w_0, v_0, \beta)}{\partial \hat{e}_{calc}(v_0, w_0, \beta)} \Big|_{\hat{e}_{calc} = \hat{e}_{calc,n}}. \quad (3.29)$$

$\partial f(\hat{e}_{calc})/\partial \hat{e}_{calc}$ išvestinė randama diferencijuojant (3.22) formulę pagal \hat{e}_{calc} kai $\hat{e}(e, \beta)$ pateiktas (3.16) formulėje:

$$\begin{aligned}
f'(e, w_0, v_0, \beta) &= \partial f(e, w_0, v_0, \beta) / \partial e = \\
&= \frac{0,6 \cdot 1,25^{-0,4(1+\beta)} C_1^{1,5}}{\frac{C_3 C_1^{C_2}}{C_2} + \frac{C_1^{1+\beta}}{1+\beta}} - \frac{0,5 \cdot 1,25^{-0,4(1+\beta)}}{\left(\frac{C_3 C_1^{C_2}}{C_2} + \frac{C_1^{1+\beta}}{1+\beta} \right)^2} (1 - C_1^{2,5}). & \quad (3.30) \\
&\left(\frac{1,275 C_1^{C_2}}{e C_2} - \frac{1,53 C_3 C_1^{C_2}}{C_2^2} + \frac{C_3 C_1^{C_2}}{C_2} \left(1,53 \ln(C_1) + \frac{0,48 C_2}{C_1} \right) + \frac{0,48 C_1^{1+\beta}}{C_1} \right),
\end{aligned}$$

čia $C_1 = 0,48e + 0,529$, $C_2 = 1,53e + 3 + \beta$ ir $C_3 = 1,275 \ln(e) - 0,82$.



3.2 pav. β^*_{∞} , $v^*_{0,\infty}$, $\beta^*_{0,2}$ ir $v^*_{0,2}$ apskaičiavimo algoritmas
Fig. 3.2. An algorithm for calculation β^*_{∞} , $v^*_{0,\infty}$, $\beta^*_{0,2}$ and $v^*_{0,2}$

Niutono metodas konverguoja jeigu galioja salyga:

$$|\hat{e}_{calc,n+1} - \hat{e}_{calc,n}| \leq |\hat{e}_{calc,n} - \hat{e}_{calc,n-1}|. \quad (3.31)$$

Pradinė RK reikšmė gali būti imama lygi reikalingai, t. y. $\hat{e}_{calc,0}(v_0, w_0, \beta) = e_{exp}(w_0)$.

Kadangi reikia rasti tik du $\beta^* \in [\beta_{min}, \beta_{max}]$ ir $v^*_0 \in [w_{0,min}, w_{0,max}]$ dydžius tai optimizavimo uždavinys gali būti supaprastintas nuo begalinės paieškos aibės $[\beta_{min}, \beta_{max}] \times [w_{0,min}, w_{0,max}]$ pereinant prie baigtinio dydžio paieškos aibės, tokiu būdu optimizavimo uždavinį redukuojant į kombinatorinį optimizavimo uždavinį. Tam reikalui β ir v_0 kitimo intervalus pakeiskime baigtinio dydžio aibėmis $\beta \in \mathbb{B} = \{\beta_i: i \in \{1, 2, 3, \dots, n_\beta\}\}$ ir $v_0 \in \mathbb{V}_0 = \{v_{0,i}: i \in \{1, 2, 3, \dots, n_{v0}\}\}$, čia n_β ir n_{v0} yra β_i ir $v_{0,i}$ narių skaičius atitinkamai. Kiekvienas \mathbb{B} ir \mathbb{V}_0 aibės narys gali būti apskaičiuotas taip: $\beta_i = \beta_{min} + \Delta\beta(i-1)$ ir $v_{0,i} = v_{0,min} + \Delta v_0(i-1)$, čia $\Delta\beta = (\beta_{max} - \beta_{min})/n_\beta$, o $\Delta v_0 = (v_{0,max} - v_{0,min})/n_{v0}$. Tuomet β ir v_0 paieškos sritis bus $\mathbb{B} \times \mathbb{V}_0$. Skaitiškai turi būti sprendžiama ne tik (3.22) lygtis bet skaitiškai taip pat turi būti suintegruotas ir (3.25) integralas.

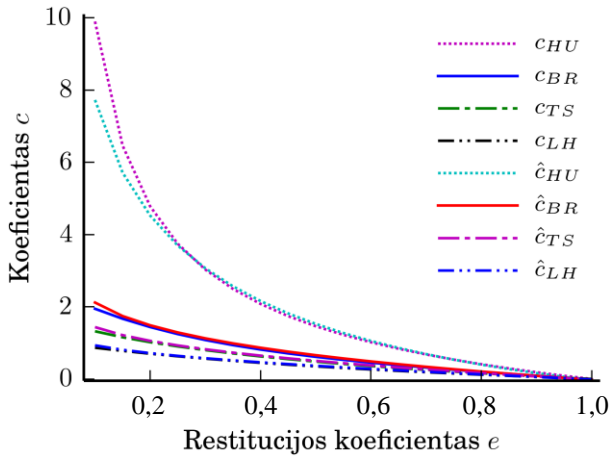
β^*_∞ , $v^*_{0,\infty}$, β^*_2 ir $v^*_{0,2}$ apskaičiavimo algoritmas pateiktas 3.2 paveiksle. Šiame algoritme d_2 norma apskaičiuojama skaitiškai integruojant (3.25) integralą taikant kairiųjų stačiakampių formulę.

3.2. Naujojo modelio taikymas

Nedimensinio slopinimo koeficiento c_i, \hat{c}_i , $i \in \{HU, BR, TS \text{ ir } LH\}$ priklausomybės nuo RK e paskaičiuotos pagal pasiūlytą (3.16) formulę, \hat{c}_i žymuo, ir integruojant (2.18) nedimensinę judėjimo lygtį, c_i žymuo, pavaizduotos 3.3 paveiksle.

Kaip matyti iš 3.3 paveikslo, kai $e_i \in [0,1, 1.0]$, naudojant pasiūlytą (3.16) formulę galima gauti \hat{c}_i , $i \in \{HU, BR, TS, LH\}$, koeficientų reikšmes artimas c_i reikšmėms gautoms integruojant (2.18) nedimensinę judėjimo lygtį. Todėl, skaitiškai sprendžiant (3.22) lygtį, kai \hat{c}_i pateiktas (3.16) formulėje, o β atitinka HU, BR, TS ir LH slopinimo modelius, galima gauti pakankamai tikslias RK e_i , $i \in \{HU, BR, TS, LH\}$, reikšmes.

Toliau pavaizduojama, kad taikant pagal sukurta metodiką apskaičiuotas v^*_0 ir β^* reikšmės galima daug tiksliau apskaičiuoti nuo w_0 priklausančią RK e , lyginant su užsiduotu empiriniu RK e_{exp} priklausančiu nuo w_0 , nei kad taikant esamas HU, BR, TS ir LH slopinimo metodikas, kai (2.16) ir (3.16) formulių parametrai $v_0 = v^*_0$ ir $\beta = \beta^*$ yra pastovūs dydžiai tam tikrame $[w_{0,min}, w_{0,max}]$ intervale.



3.3 pav. Įvairių metodikų nedimensinio slopinimo koeficiento c priklausomybės nuo restitucijos koeficiento e

Fig. 3.3. Dependencies of the nondimensional damping coefficient c on the coefficient of restitution e of the different models

Metodikų palyginimui iš literatūros buvo paimti plieninės, aliumininės, varinės, plieninės, marmurinės ir švininės dalelių eksperimentiniai duomenys: marmurinės dalelės eksperimentiniai duomenys paimti iš (Bridges ir Hatzes 1984; Goldsmith 1960; Gorham ir Kharaz 2000; Stevens ir Hrenya 2005) šaltinių. Pagal minėtuose šaltiniuose pateiktus eksperimentinius duomenis (3.34) empirinės funkcijos koeficientai apskaičiuoti naudojant R programą (R Development Core Team 2008) pateikti 3.1 lentelėje.

$$\hat{e}_{exp}(w_0) = aw_0^b, \quad w_0 \in [w_{0,min}, w_{0,max}] \quad (3.32)$$

Pagal 3.2 paveiksle pavaizduotą algoritmą apskaičiuotos švininės, plieninės, aliumininės, varinės ir marmurinės dalelės $\beta_{*0,\infty}^*$ ir $\beta_{*0,2}^*$, $v_{*0,\infty}^*$ ir $v_{*0,2}^*$ koeficientų reikšmės, atitinkančios mažiausias $\min\{d_\infty\} \equiv \min\{d_\infty(\hat{e}_{calc}, e_{exp})\}$ ir $\min\{d_2\} \equiv \min\{d_2(\hat{e}_{calc}, e_{exp})\}$ normas (smulkiau žiūrėti (3.16) formulę), duotos 3.2 lentelėje.

Kaip matyti iš 3.3 lentelės skirtingų medžiagų $\beta_{*0,\infty}^*$ ir $\beta_{*0,2}^*$, $v_{*0,\infty}^*$ ir $v_{*0,2}^*$ koeficientai apskaičiuoti taikant d_∞ ir d_2 normas yra skirtingi.

3.4–3.8 paveiksluose pateiktos švininės, aliumininės, marmurinės, plieninės ir varinės dalelių skaitiškai (Niutono metodu sprendžiant (3.22) lygtį)

3.1 lentelė. Švininės, plieninės, aliumininės, varinės ir marmurinės dalelių (3.32) funkcijos a ir b koeficientai ir funkcijos galiojimo intervalas $[w_{0,min}, w_{0,max}]$

Table 3.1. (3.34) equation a and b coefficients values and validation interval $[w_{0,min}, w_{0,max}]$ for lead, steel, aluminium, copper and marble particles

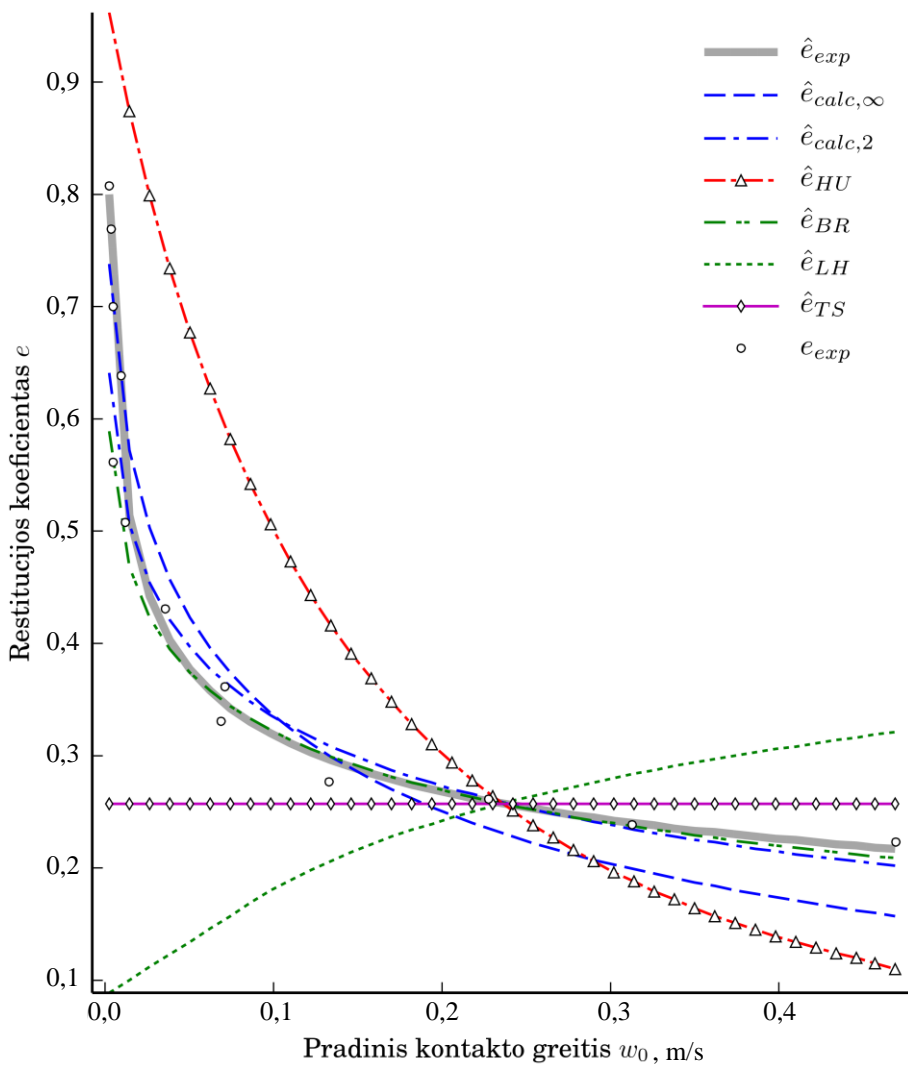
Medžiaga	a	b	Pradinio kontakto greičio intervalas $[w_{0,min}, w_{0,max}]$
Švinas	0,18	-0,2473	[0,0024, 0,4694]
Plienas	0,865	-0,0686	[0,4060, 1,480]
Aliuminis	0,618	-0,0970	[0,0071, 0,4552]
Varis	0,526	-0,1189	[0,0036, 0,4362]
Marmuras	0,726	-0,0379	[0,0071, 0,4528]

3.2 lentelė. Pagal 3.2 paveiksle pateiktą algoritmą apskaičiuotos švino, plieninės, aliumininės, varinės ir marmurinės dalelės $\beta^*_{0,\infty}$ ir $\beta^*_{0,2}$ $v^*_{0,\infty}$ ir $v^*_{0,2}$ koeficientų reikšmės

Table 3.2. The coefficients $\beta^*_{0,\infty}$ ir $\beta^*_{0,2}$ $v^*_{0,\infty}$ ir $v^*_{0,2}$ values of the algorithm (Fig. 3.2) for lead, steel, aluminium, copper and marble particles

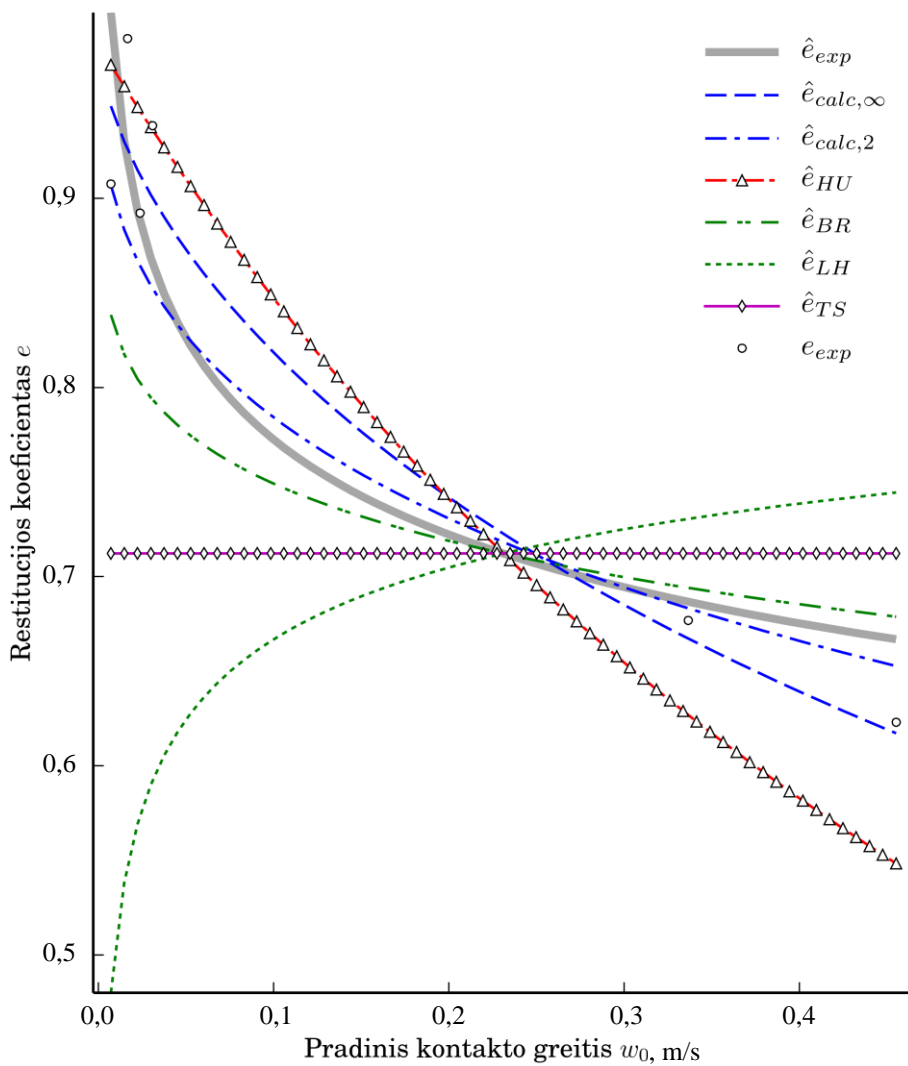
Medžiaga	$\min\{d_\infty\}$	$v^*_{0,\infty}$	$\beta^*_{0,\infty}$	$\min\{d_2\}$	$v^*_{0,2}$	$\beta^*_{0,2}$
Švinas	$6,26 \cdot 10^{-2}$	0,143	0,694	$1,373 \cdot 10^{-2}$	0,250	0,551
Plienas	$3,916 \cdot 10^{-3}$	1,190	1,084	$2,107 \cdot 10^{-3}$	0,570	1,045
Aliuminis	$4,967 \cdot 10^{-2}$	0,267	1,058	$9,914 \cdot 10^{-3}$	0,0474	0,746
Varis	$7,649 \cdot 10^{-2}$	0,237	1,071	$1,129 \cdot 10^{-2}$	0,276	0,694
Marmuras	$7,00 \cdot 10^{-3}$	0,252	0,499	$1,885 \cdot 10^{-3}$	0,310	0,460

apskaičiuotos restitucijos koeficientų priklausomybės nuo pradinio kontakto greičio w_0 , $w_0 \in [w_{0,min}, w_{0,max}]$. Šiuose paveiksluose \hat{e}_{exp} , $\hat{e}_{calc,\infty}$, $\hat{e}_{calc,2}$, \hat{e}_{HU} , \hat{e}_{BR} , \hat{e}_{LH} ir \hat{e}_{TS} yra tokie: \hat{e}_{exp} – eksperimentiškai nustatyto RK e empirinė (3.32) funkcija, jos koeficientai imami iš 2.1 lentelės; $\hat{e}_{calc,\infty}$ ir $\hat{e}_{calc,2}$ yra RK apskaičiuoti kai (3.22) lygties $\beta \in \{\beta^*_{0,\infty}, \beta^*_{0,2}\}$ ir $v_0 \in \{v^*_{0,\infty}, v^*_{0,2}\}$, $\beta^*_{0,\infty}$, $\beta^*_{0,2}$, $v^*_{0,\infty}$ ir $v^*_{0,2}$ reikšmės imamos iš 3.3 lentelės; \hat{e}_{HU} , \hat{e}_{BR} , \hat{e}_{LH} , \hat{e}_{TS} yra RK apskaičiuoti kai (3.22) lygties β koeficientai yra lygūs atitinkamiems esamų slopinimo modelių β koeficientams (β reikšmės imamos iš 2.1 lentelės); \hat{e}_{HU} , \hat{e}_{BR} , \hat{e}_{LH} , \hat{e}_{TS} restitucijos koeficientų $v_0 = (w_{0,min}, w_{0,max}) / 2$, čia $w_{0,min}$ ir $w_{0,max}$ pateikti 3.1 lentelėje.



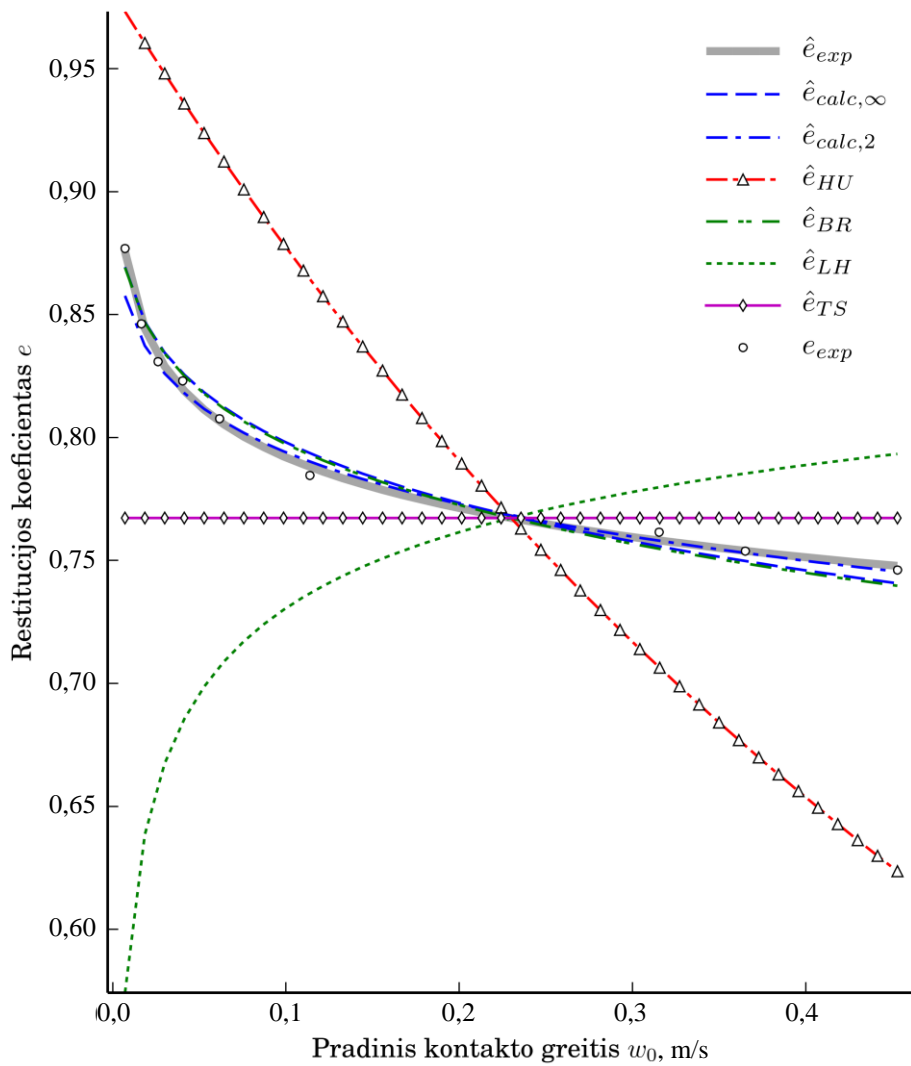
3.4 pav. Švininės dalelės restitucijos koeficientų priklausomybės nuo pradinio kontakto greičio w_0

Fig. 3.4. Dependencies of restitution coefficients of the lead particle on initial contact velocity w_0



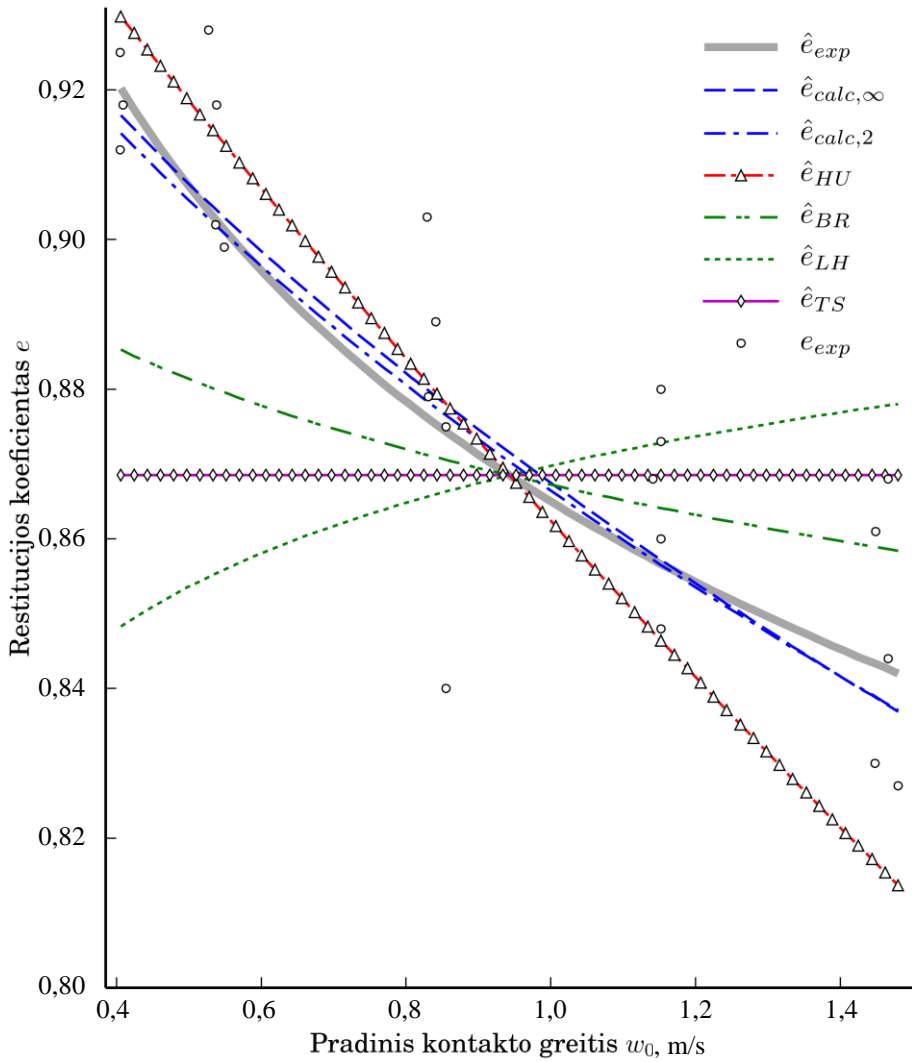
3.5 pav. Aliumininės dalelės restitucijos koeficientų priklausomybės nuo pradinio kontakto greičio w_0

Fig. 3.5. Dependencies of restitution coefficients of the aluminium particle on initial contact velocity w_0



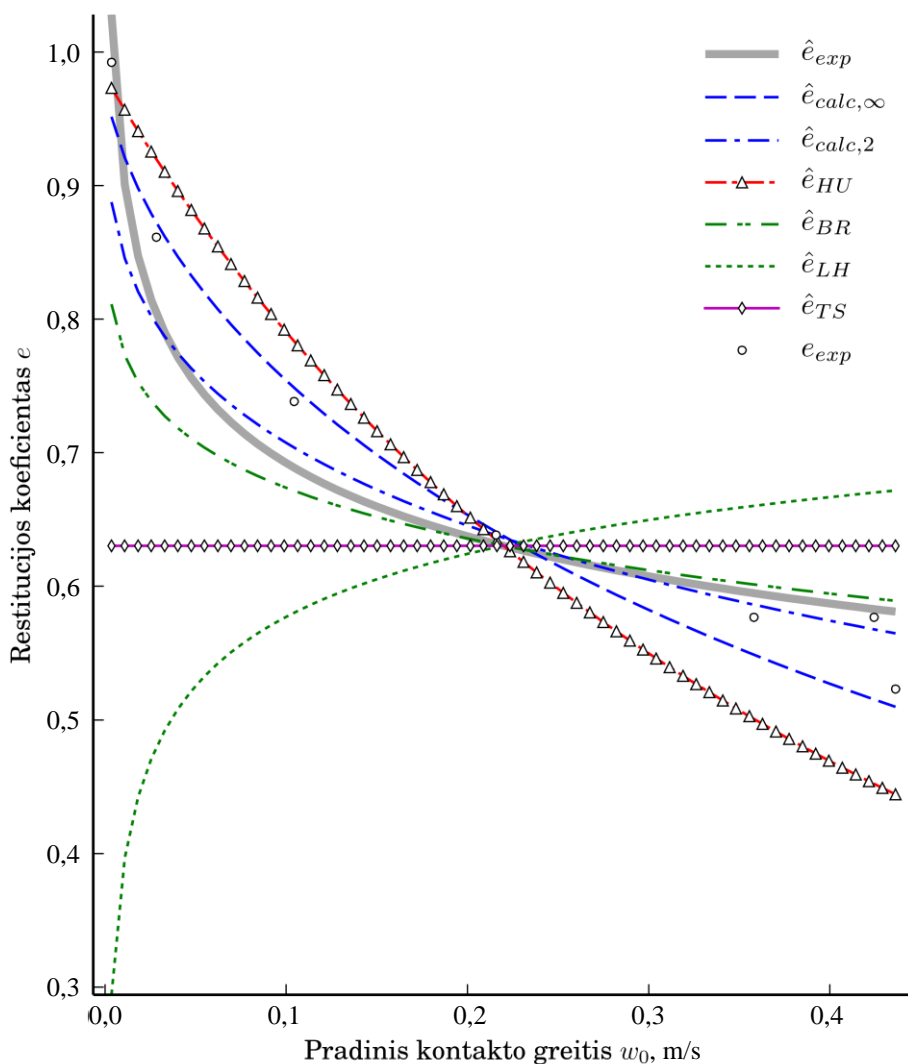
3.6 pav. Marmurinės dalelės restitucijos koeficientų priklausomybės nuo pradinio kontakto greičio w_0

Fig. 3.6. Dependencies of restitution coefficients of the marble particle on initial contact velocity w_0



3.7 pav. Plieninės dalelės restitucijos koeficientų priklausomybės nuo pradinio kontakto greičio w_0

Fig. 3.7. Dependencies of restitution coefficients of the steel particle on initial contact velocity w_0



3.8 pav. Varinės dalelės restitucijos koeficientų priklausomybės nuo pradinio kontakto greičio w_0

Fig. 3.8. Dependencies of restitution coefficients of the brass particle on initial contact velocity w_0

3.4–3.8 paveikslai rodo, kad esamų metodikų β koeficientai tik kai kuriais atvejais leidžia pakankamai tiksliai apskaičiuoti RK e . Iš minėtų paveikslų taip pat matyti, kad BR , HU , LH ir TS modelių atitikimas eksperimento empirinėms

kreivėms \hat{e}_{exp} yra prastesnis lyginant su sukurta metodika apskaičiuotos $\hat{e}_{calc,\infty}$ arba $\hat{e}_{calc,2}$ kreivės.

3.3. Trečiojo skyriaus išvados

1. Analitiniai ir skaitiniai tyrimai parodė, kad taikant sukurta slopinimo modelį galima parinkti tokias parametrų v_0^* ir β^* reikšmes, atitinkančias tam tikrą pradinį greičių intervalą, kad apskaičiuotas restitucijos koeficientas būtų apytiksliai lygus reikalingam arba laisvai pasirinktam restitucijos koeficientui minėtame pradinio greičių intervale.
2. Pagal sukurta metodiką apskaičiuotos v_0^* ir β^* reikšmės gali būti taikomos ne tik nagrinėjamų dviejų kontaktuojančių dalelių judėjimui apskaičiuoti bet tos pačios v_0^* ir β^* reikšmės gali būti taikomos daugelio dalelių sistemos kiekvienam kontaktui nagrinėti.
3. Taikant sukurta nedimensinio koeficiento \hat{e} apskaičiavimo metodiką galima apskaičiuoti nuo pradinio kontakto greičio priklausomą restitucijos koeficientą neintegruojant nedimensinę ar dimensinę judėjimo lygtis.
4. Pasiūlyta nedimensinio slopinimo koeficiento apskaičiavimo metodika gali būti naudojama kartu su esančiais slopinimo modeliais, tačiau bendruoju atveju tikslesnius rezultatus galima gauti imant koeficiento β reikšmes kurios skiriasi nuo jau esamų slopinimo modelių β reikšmių.

Bendrosios išvados

1. Atlikus literatūros analizę nustatyta, kad diskrečiųjų elementų metode dažniausiai taikomi normalinio kontakto klampiatampraus slopinimo modeliai yra pusiau empirinio pobūdžio, slopinimo konstantos neturi aiškos fizinės prasmės, o jų poveikis galutiniams skaičiavimo rezultatams nėra ištirtas.
2. Taikant nedimensinę analizę netiesiniam normaliniam kontaktui aprašyti buvo pasiūlytas apibendrintas klampiatampraus slopinimo modelis. Šiuo modeliu parodyta, kad žinomų Hu, Briliantovo, Tsudžio, Lyo ir Hermano tarpusavio skirtumai apibūdinami nedimensine slopinimo konstanta ir persidengimo laipsnio rodikliu.
3. Sukurtas apibendrintas modelis atskleidė atskirų žinomų modelių ypatumus. Skaitiniais slopinimo tyrimais nustatyta, kad esant vienodam restitucijos koeficientui, dviejų dalelių kontaktas, aprašytas slopinimo modeliu turinčiu didesnę persidengimo laipsnio rodiklį, bus apibūdinamas didesne maksimalia kontakto jėga ir ilgesne kontakto trukme. Atsirandantys skirtumai priklauso nuo restitucijos koeficiento e ir tampa reikšmingais kai $e < 0,8$.
4. Slopinimo modelių įtaka buvo tirta modeliuojant dalelių sąveikas skirtingo ilgio dalelių grandinėse (nuo 10 iki 200 dalelių). Nustatyti

tokie didžiausi santykiniai skirtumai tarp skirtingų slopinimo modelių likutinės energijos: kai restitucijos koeficientas lygus 0,8, o grandinės ilgis yra 60 dalelių, tuomet didžiausias santykinis skirtumas yra lygus 0,6; kai restitucijos koeficientas lygus 0,5, o grandinės ilgis 20 dalelių, tuomet didžiausias santykinis skirtumas yra lygus 0,5. Šie ir kiti skaičiavimai parodė, kad likutinės energijos santykiniai skirtumai didėja iki tam tikros ribos (kiekvienų skaičiavimo atveju ši riba yra skirtinga) didėjant dalelių skaičiui grandinėje, toliau didėjant grandinei likutinės energijos santykinis skirtumas mažėja.

5. Atlikti palyginimai su eksperimentiniais bangos sklidimo daugelio dalelių sistemoje rezultatais parodė, kad slopinimo modelio poveikis laike yra daug sudėtingesnis. Nustatyta, kad geriausias sutapimas skirtingais laiko momentais, pasiekiamas taikant skirtingus slopinimo modelių. Šie rezultatai sietini su skirtingomis restitucijos koeficiento ir pradinio kontakto greičio priklausomybėmis.
6. Siekiant įvertinti restitucijos koeficiento priklausomybę nuo pradinio kontakto greičio tam tikrame pradinio greičio intervale, buvo sukurta apibendrinto klampiatampraus slopinimo modelio parametrų skaičiavimo metodika, įvertinanti turimus eksperimentinius rezultatus. Darbe atliktų skaitinių skaičiavimų ir eksperimentinių rezultatų palyginimai patvirtina sukurto modelio ir jo taikymo metodikos efektyvumą.
7. Darbe sukurtas apibendrintas slopinimo modelis ir jo taikymo metodika nėra apribota tik esamais slopinimo modeliais, bet leidžia kurti naujus slopinimo modelius ir mažinti skirtumą tarp teorinių ir eksperimentinių rezultatų.

Literatūra ir šaltiniai

Abd-Elhady, M. S., Abd-Elhady S., Rindt, C. C. M. and Van Steenhoven, A. A. 2010. Force Propagation Speed in a Bed of Particles due to an Incident Particle Impact. *Advanced Powder Technology* 21(2): 150–164.

Balevičius, R., Kačianauskas, R., Mróz, Z. and Sielamowicz, I. 2007. Microscopic and Macroscopic Analysis of Granular Material Behaviour in 3D Flat-Bottomed Hopper by the Discrete Element Method. *Archives of Mechanics* 59(3): 231–257.

Brilliantov, N. V., Frank S., Jan-Martin H. and Thorsten P. 1996. Model for Collisions in Granular Gases. *Physical Review E* 53(5): 5382–5392.

Cundall, P. A. and Strack. O. D. L. 1979. A Discrete Numerical Model for Granular Assemblies. *Géotechnique* 29(1): 47–65.

Daraio, C., Nesterenko, V. F., Herbold, E. B. and Jin, S. 2005. Strongly Nonlinear Waves in a Chain of Teflon Beads. *Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 72(1): 1–9.

Džiugys, A. and Peters, P. 2001. An Approach to Simulate the Motion of Spherical and Non-Spherical Fuel Particles in Combustion Chambers. *Granular Matter* 3(4): 231–266.

Freireich, B., Litster, J. and Wassgren, C. 2009. Using the Discrete Element Method to Predict Collision-Scale Behavior: A Sensitivity Analysis. *Chemical Engineering Science* 64(15): 3407–3416.

Gharib, M. and Hurmuzlu, Y. 2012. A New Contact Force Model for Low Coefficient of Restitution Impact. *Journal of Applied Mechanics* 79(6): 1–5.

- Gilardi, G. and Sharf, I. 2002. Literature Survey of Contact Dynamics Modelling. *Mechanism and Machine Theory* 37(10): 1213–1239.
- Gorham, D. A. and Kharaz, A. H. 2000. The Measurement of Particle Rebound Characteristics. *Powder Technology* 112(3): 193–202.
- Griffiths, D. V. and Mustoe, G. G. W. 2001. Modelling of Elastic Continua Using a Grillage of Structuralelements Based on Discete Element Concepts. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50(7): 1759–1775.
- Harbola, U., Rosas, A., Romero, A. H., Esposito, M. and Lindenberg, K. 2009. Pulse Propagation in Decorated Granular Chains: An Analytical Approach. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 80(5): 1-9.
- Horabik, J. and Molenda, M. 2016. Parameters and contact models for DEM simulations of agricultural granular materials: A review. *Biosystems Engineering* 147: 206-225.
- Horie, Y. and Yano, K. 1999. Discrete Element Modeling of Shock Compression of Hexagonal Boron Nitride Powder with and without Copper Addition. *Journal of Materials Processing Technology* 85(1): 109–114.
- Hunt, K. H. and Crossley., F. R. E. 1975. Coefficient of Restitution Interpreted as Damping in Vibroimpact. *Journal of Applied Mechanics* 42(2): 440–445.
- Jankowski, R. 2006. Analytical Expression between the Impact Damping Ratio and the Coefficient of Restitution in the Non-Linear Viscoelastic Model of Structural Pounding. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 35(4): 517–524.
- Job, S., Melo, F., Sokolow, A. and Sen, S. 2007. Solitary Wave Trains in Granular Chains: Experiments, Theory and Simulations. *Granular Matter* 10(1): 13–20.
- Job, S., Santibanez, F., Tapia, F. and Melo, F., 2008. Nonlinear Waves in Dry and Wet Hertzian Granular Chains. *Ultrasonics* 48(6–7): 506–154.
- Johnson, K L. 1985. *Society Contact Mechanics*. Cambridge University Press.
- Kharaz, A. H., Gorham, D. A. and Salman, A. D. 2001. An Experimental Study of the Elastic Rebound of Spheres. *Powder Technology* 120(3): 281–291.
- Kruggel-Emden, H., Simsek, E., Rickelt, S., Wirtz, S. and Scherer, V. 2007. Review and Extension of Normal Force Models for the Discrete Element Method. *Powder Technology* 171(3): 157–173.
- Kruggel-Emden, H., Wirtz, S. and Scherer, V. 2009. Applicable Contact Force Models for the Discrete Element Method: The Single Particle Perspective. *Journal of Pressure Vessel Technology* 131(2): 1–11.
- Kuwabara, G. and Kono, K. 1987. Restitution Coefficient in a Collision between Two Spheres. *Japanese Journal of Applied Physics* 26(8R): 1219–1223.
- Labous, L., Rosato, A. and Dave, R. 1997. Measurements of Collisional Properties of Spheres Using High-Speed Video Analysis. *Physical Review E* 56(5): 5717–5725.
- Lee, J. and Herrmann, H. J. 1999. Angle of Repose and Angle of Marginal Stability: Molecular Dynamics of Granular Particles. *Journal of Physics A: Mathematical and General* A26: 373–383.
- Luding, S. 1994. “Anomalous Energy Dissipation in Molecular-Dynamics Simulations of Grains: The Detachment Effect.” *Physical Review E* 50(5): 4113–4122.
- MacHado, M., Moreira, P., Flores, P. and Lankarani, H. M. 2012. Compliant Contact Force Models in Multibody Dynamics: Evolution of the Hertz Contact Theory. *Mechanism and Machine Theory* 53: 99–121.
- Malone, K. F. and Xu, B. H. 2008. Determination of Contact Parameters for Discrete Element

Method Simulations of Granular Systems. *Particuology* 6(6): 521–528.

McNamara, S. and Falcon, E. 2005. Simulations of Vibrated Granular Medium with Impact-Velocity-Dependent Restitution Coefficient. *Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 71(3): 1–6.

Melo, F., Job, S., Santibanez, F. and Tapia, F. 2006. Experimental Evidence of Shock Mitigation in a Hertzian Tapered Chain. *Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 73(4): 1–7.

Navarro, H. A., and Braun, M. S. 2013. Determination of the Normal Spring Stiffness Coefficient in the Linear Spring-Dashpot Contact Model of Discrete Element Method. *Powder Technology* 246: 707–722.

Nesterenko, V. F., Daraio, C., Herbold, E. B. and Jin, S. 2005. Anomalous Wave Reflection at the Interface of Two Strongly Nonlinear Granular Media. *Physical Review Letters* 95(15): 1–4.

R Development Core Team, R Foundation For Statistical Computing. 2008. R: A Language and Environment for Statistical Computing. Vienna Austria R Foundation for Statistical Computing 1(10): ISBN 3-900051-07-0.

Ramírez, R., Pöschel, T., Brilliantov, N. V. and Schwager, T. 1999. Coefficient of Restitution of Colliding Viscoelastic Spheres. *Physical Review E* 60(4): 4465–72. Rosas, Alexandre, J. Buceta, and Katja Lindenberg. 2003. “Dynamics of Two Granules.” *Science* 340: 1–8.

Sadd, M. H., Tai, Q. and Shukla, A. 1993. Contact Law Effects on Wave Propagation in Particulate Materials Using Distinct Element Modeling. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 28(2): 251–265.

Santibanez, F. 2011. Experimental Evidence of Solitary Wave Interaction in Hertzian Chains. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 84(2): 1–5.

Schwager, T. and Pöschel, T. 2007. Coefficient of Restitution and Linear-Dashpot Model Revisited. *Granular Matter* 9(6): 465–469.

Shafer, J., Dippel, S. and Wolf, D. E. 1996. Force Schemes in Simulations of Granular Materials. *Journal de Physique I* 6(1): 5–20.

Stevens, A. B. and Hrenya, C. M. 2005. Comparison of Soft-Sphere Models to Measurements of Collision Properties during Normal Impacts. *Powder Technology* 154(2–3): 99–109.

Sun, X., Sakai, M. and Yamada, Y. 2013. Three-Dimensional Simulation of a Solid-Liquid Flow by the DEM-SPH Method. *Journal of Computational Physics* 248: 147–176.

Thomas, C. N., Papargyri-Beskou, S. and Mylonakis, G. 2009. Wave Dispersion in Dry Granular Materials by the Distinct Element Method. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 29(5): 888–897.

Tomas, J. 2004. Fundamentals of Cohesive Powder Consolidation and Flow. In *Granular Matter*, 75–86.

Tsuji, Y., Tanaka, T. and Ishida, T. 1992. Lagrangian Numerical Simulation of Plug Flow of Cohesionless Particles in a Horizontal Pipe. *Powder Technology* 71(3): 239–250.

Wang, Y., Wensrich, C. M. and Ooi, J. Y. 2012. Rarefaction Wave Propagation in Tapered Granular Columns. *Chemical Engineering Science* 71: 32–38.

Wensrich, C. M., Stratton, R. E. 2011. Shock Waves in Granular Materials: Discrete and Continuum Comparisons. *Powder Technology* 210(3): 288–292.

Wriggers, P. 2006. *Computational Contact Mechanics, Second Ed., Springer*.

Zamani, N., Usama, E. S. 2011. Analysis of Wave Propagation in Dry Granular Soils Using DEM Simulations. *Acta Geotechnica* 6(3): 167–182.

Autoriaus mokslinių publikacijų disertacijos tema sąrašas

Straipsniai recenzuojamuose mokslo žurnaluose

Markauskas, D., Ramírez-Gómez, A., Kačianauskas, R., Zdancevičius, E. 2015. Maize grain shape approaches for DEM modelling. *Computers and Electronics in Agriculture* 118: 247–258. (ISI Web of Science).

Kačianauskas, R., Kruggel-Emden, H., Zdancevicius, E., Markauskas, D. 2016. Comparative evaluation of normal viscoelastic contact force models in low velocity impact situations. *Advanced Powder Technology* 27: 1367–1379. (ISI Web of Science).

Kačianauskasa, R., Kruggel-Emden, H., Markauskas, D., Zdancevičius, E. 2015. Critical assessment of visco-elastic damping models used in DEM simulations. *Procedia engineering* 102: 1415–1425.

Summary in English

Introduction

Formulation of the problem

Discrete element method (DEM) is widely applied for particle systems simulations. Historically, DEM was dedicated for the simulation of powder materials, however, nowadays it is used for simulations of various solid and liquid materials. The assumptions of DEM depend on every particular case, however, there is one common rule that every single particle motion is describe by the Second Newton law.

Despite a wide application field of DEM, there is still no unique theory of DEM. Vector algebra and the Second Newton law describe particles kinematics and dynamics. However, particles contact forces can be obtained in various ways. Well known the Hook and Hertz laws are suitable only for the elastic particle simulation, while there is no common methodology for the damping force. Most of damping force models are created intuitively with no physical or contact mechanics background. Due to lack of the background another problem arises in DEM: many unfounded constants are involved in the already created damping models. The values of the constant are obtained by calibration for the particulate case of the calculation and have no physical meaning at all. The damping effect can be produced by numerous factors; however, in practical applications of DEM, as a rule, the damping phenomenon is modelled by applying

viscoelastic interaction of the particles due to the relative simplicity of the viscoelastic interaction model and due to possibility to relate the viscoelastic model to the coefficient of restitution.

As a rule, simulation of the multi-particle systems using DEM requires many computational resources. The findings of the contacts of the particles and calculations of the contact forces require most time of the simulation. Due to very small time step of the integration, comparing to the overall simulation time, the finding of the contacts and the calculations of the contact forces are very important factors that may determine the applicability of DEM. Thus, in DEM two inconsistent goals should be achieved: the simplicity of the interaction model on the one hand and accuracy of the simulation on the other. The already created damping models can give the different results, however, the problem is that there is a crucial lack of information and recommendation which of the models should be used in the particular situation. Therefore, the examination and estimation of the already existing damping models as well as making recommendations on the usage of the already existing damping models are one of the goals of the present work.

Another issue of DEM is concerned the fact that the coefficient of restitution of the contacting particles depends on the initial velocity of the contact. The already existing models take into account the influence of the initial contact velocity on the coefficient of restitution. However, the thing is that in granular matter most of time a particle may contact with several particles at the same time. The contact of two interacting particles is influenced by other particles that are also in contact with the two particles. Therefore, in this case the initial contact velocity of the two contacting particles becomes just a formal quantity and strictly speaking cannot be applied for calculation of the contact since other particles also influence the behaviour of the contact. Therefore, another goal of the present works is to propose a methodology that allows taking into account the influence of other (subsidiary) contacting particles on the behaviour of the contact of the two contacting particles under consideration.

The relevance of the thesis

Behaviour of the particles of the macroscopic system depends on contacts of the particles very much. Therefore, an accuracy of the contact model is very important for DEM. Comparing to the models of the elastic interaction the already existing models of the damping interaction have less sound physical and mechanical backgrounds.

Until now, the majority of the already existing damping models of the DEM are not based on the contact mechanic. Due to the lack of the recommendations, the usage of the various damping models in DEM is difficult. Another problem is that many physically unclear constants are involved in already created damping models, whose values are obtained by the calibration and fitting the constants for the particular damping model under the particular simulation assumptions. It is known that the coefficient of the restitution depends on the initial contact velocity. However, it is possible just partially to take into account the dependence of the coefficient of restitution on the initial contact

velocity by the already existing damping models. Therefore, to propose a more suitable methodology for calculation the damping phenomenon is relevant task in DEM.

The object of the research

The object of the investigation is the viscoelastic damping models used in DEM simulations.

The aim of the thesis

To create the new viscoelastic damping methodology appropriate for particle contact of normal direction, which take into account the relation of initial contact velocity and coefficient of restitution.

The objectives of the thesis

1. To make the review and comparative analysis of DEM viscoelastic damping models and to estimate their advantages and disadvantages;
2. To create the general viscoelastic damping model suitable for DEM;
3. To analyse the existing damping models in two particles contact and the wave propagation in particles chain simulation cases, using the general viscoelastic damping form;
4. To adapt created damping model for estimation of the relation between coefficient of restitution and initial contact velocity.

Research methodology

Investigation performed using discrete element method, viscoelastic normal damping mechanics, nondimensional analysis, approximation and optimization theories. C++ and FORTRAN languages are used for the realization of those methodologies.

The scientific novelty of the thesis

In the present thesis the generalised expression of the already existing viscoelastic damping model is proposed. The expression involves widely used and already known

viscoelastic damping models that can be treated as the partial cases of the proposed generalised expression.

In the thesis, an analysis of the already existing viscoelastic damping models is conducted. The numerical results obtained by the considered methods are compared with each other as well as with the experimental data taken from literature. On the basis of the comparative analysis the recommendations on the usage of the already existing viscoelastic damping models in DEM are provided.

The new viscoelastic damping methodology is created that takes into account the dependence of the coefficient of restitution on the initial contact velocity. The parameters of the proposed methodology do not depend on the initial contact velocity within a certain interval, but depend on the interval of the initial contact velocity and on the assumed dependency of the coefficient of restitution on the initial contact velocity. Thus, the parameters of the created methodology are constant within a certain interval of the initial contact velocity and for required (chosen) dependency of the coefficient of restitution on the initial contact of velocity. It makes the use of the created methodology easier and enable to obtain more precise results of modelling of the multiparticle systems.

The practical value of the research findings

The analysis of the existing viscoelastic damping models allowed to propose the recommendations on the usage of those models in DEM.

The more accurate and widely applicable normal viscoelastic damping methodology is presented that takes into account the dependency of the coefficient of restitution on the initial contact velocity.

The defended statements

1. The generalised viscoelastic damping model suitable for the using in DEM is created.
2. The initial contact velocity is treated differently in the already existing different viscoelastic damping models. That leads to the different results of the simulations. In thesis the recommendations of normal contact viscoelastic damping models usage are proposed and the main relations of differences between damping models are determined.
3. The newly created methodology of calculation of the parameters of the generalised viscoelastic damping model takes into account influence of the initial contact velocity on the coefficient of restitution and enables to model viscoelastic damping phenomena more easily, and accurately than current models.

The approval of the research findings

Three scientific papers have been published on the subject of the thesis: two papers have appeared in journals included in „ISI Web of Science“ database and one papers have appeared in other database journals.

The results of the research described in the thesis were presented at nine scientific conferences in Lithuania and abroad:

1. Comparison of Various Damping Models for Multiple-Contact Behaviour of particles. 7th International Conference for Conveying and Handling of Particulate Solids – ChoPS, 2012, Germany;
2. Slopinio modelių įtaka dalelių stulpelio elgsenai. National XXI Workshop of Lithuanian Association of Computational Mechanics, 2013, Lithuania;
3. Dissipative Contact of Particles – Review and Comparison of Discrete Element Contact Models. 20th International Conference On Computer Methods In Mechanics, 2013, Poland;
4. Klampiamprių slopinimo Diskrečiųjų Elementų Metode modelių skaitinis tyrimas. IV-oji jaunųjų mokslininkų konferencija, 2014, Lithuania;
5. Klampiamprių slopinimo modelių įtaka dalelių sistemos elgsenai. National XXII Workshop of Lithuanian Association of Computational Mechanics, 2014, Lithuania;
6. Critical assessment of visco-elastic damping models used in DEM simulations. The 7th World Congress on Particle Technology (WCPT7), 2014, China;
7. Contribution of Visco-elastic Damping Effects in Contact of particles. 8th International Conference for Conveying and Handling of Particulate Solids – ChoPS, 2015, Israel;
8. Slopinio modelių naudojimo diskrečiųjų elementų metode ypatumai. National XXIV Workshop of Lithuanian Association of Computational Mechanics, 2016, Lithuania;
9. Improvement of viscoelastic damping for Hertz contact of particles due to impact velocity. Modern Building Materials, Structures and Techniques – MBMST, 2016, Lithuania;

The structure of the thesis

The thesis is composed of the introduction, three chapters, the general conclusions, the list of references, the list of publications of the author on the topic of the dissertation and a summary in English.

The thesis consists of 105 pages; 122 numbered formulas, 31 figures and 7 tables are provided. The research was conducted on the basis of 68 reference sources.

1. The review of discrete element method and the damping models

Discrete element method (DEM) is a numerical method used for simulation of the particle systems. DEM applicability is very wide and can comprise many interactions: contact forces, interaction with fluids, electrostatics as well as electrodynamics forces. Therefore DEM can be applied to model many phenomena and for many granular and solids matters.

Spherical particles are investigated in the present research. Every particle is characterised by time constant parameters: modulus of elasticity, Poisson's ratio and density. It is assumed that the contacting particles overlap in the contact point. The boundary conditions can be described as a curved surface. The contact of a particle with a surface is described as the contact of the particle with another particle of infinitive radius and mass. These approaches allow simulating particle system when every single particle is simulated independently and movement of the particles is based on the Second Newton law.

The interaction models of particles relate contact forces with overlaps of the contacting particles. The normal forces appear in the contact points and is collinear to the line connecting contact point and particle centre of mass. Thus, no torque appears duo to the normal interaction in the spherical particles. Normal contact of the particles can be modelled based on the Kelvin-Voigt rheological model, consisting of linear or nonlinear, with respect to the overlap, elastic spring and a damper that is nonlinear with respect to the overlap, however, the damping force as a rule is linear with respect to the contact velocity (Fig. S1.1).

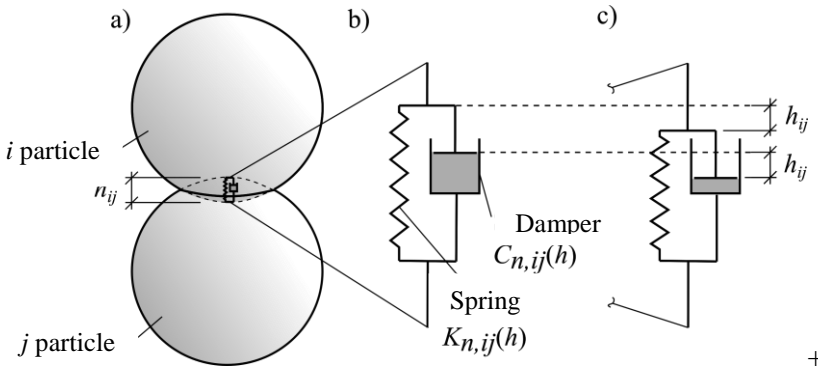


Fig. S1.1. Normal interaction of the particles: a) shows interacting particle, b) and c) show unreformed and deformed Kelvin's rheological model of normal interaction

In the Kelvin-Voigt rheological model the total force of the normal interaction is obtained by summing up the forces acting in the elastic spring and the dashpot. The elastic spring represents linear Hook's or nonlinear Hertz's models, while dashpot represents viscous interaction that entails so called the damping force. The coefficient of

restitution depending on initial contact velocity is employed to estimate the parameters of the viscoelastic damping model in DEM. In the present research the following damping models are examined: linear spring (*LS*) (Cundall and Strack 1979), Lee and Hermann (*LH*) (Lee and Hermann 1999), Tsuji (*TS*) (Tsuji *et al.* 1992), Brilliantov (*BR*) (Brilliantov *et al.* 1996) and Hu (*HU*) (Hu *et al.* 2011).

2. Generalized damping model development and application

The nondimensional equation of the motion allows us to generalize the damping models used in DEM by the unique function that characterizes the damping of the normal contact

$$C(h(t)) = cm_{eff}^{(3-2\beta)/5} v_0^{(1-4\beta)/5} K_n^{(2+2\beta)/5} h^\beta(t), \quad (S2.1)$$

here c is nondimensional damping coefficient, m_{eff} is effective mass, v_0 is a parameter that can coincide with initial contact velocity, K_n is coefficient of stiffness of the elastic normal contact, h is overlap and β is the power factor depending on damping model. The nondimensional damping coefficient c depends only on coefficient of restitution (COR) e . The dependencies of c on COR of various damping models are depicted in figure S2.1.

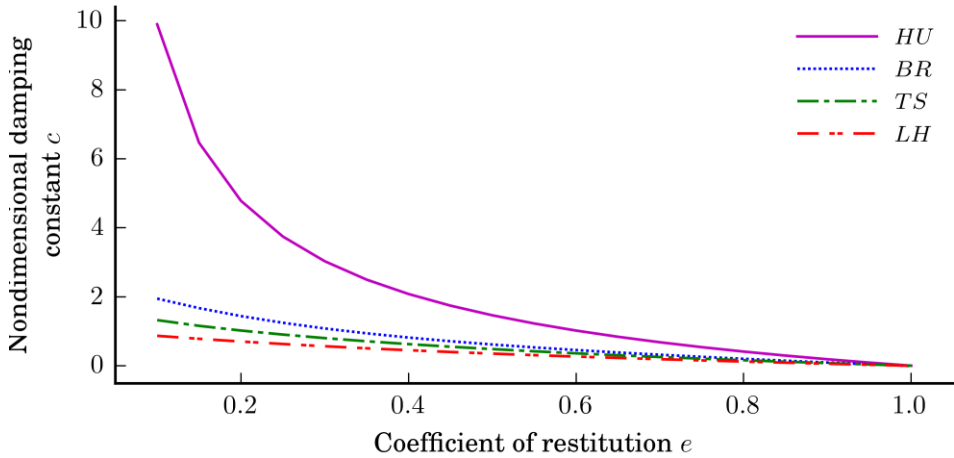


Fig. S2.1. The dependence of the coefficients c_{LS} , c_{TS} , c_{LH} , c_{BR} and c_{HU} on restitution coefficient $e \in [0.1, 1.0]$

The formulas of the damping functions C_i , $i \in \{TS, LH, HU, BR\}$, are obtained by combining corresponding values of the power factor β with equation S2.1:

Table T2.1. Damping constant expressions for various damping models

Viscoelastic damping model	Power factor β	Damping constant $C(h)$
LS	0	$C_{LS} = c_{LS}(e) K_n^{0.5} m_{eff}^{0.5}$
TS	0,25	$C_{TS}(h) = c_{TS}(e) m_{eff}^{0.5} K_n^{0.5} h^{0.25}$
LH	0	$C_{LH} = c_{LH}(e) m_{eff}^{3/5} v_0^{0.2} K_n^{0.4}$
BR	0,5	$C_{BR}(h) = c_{BR}(e) m_{eff}^{0.4} v_0^{-0.2} K_n^{3/5} h^{0.5}$
HU	3/2	$C_{HU}(h) = c_{HU}(e) v_0^{-1} K_n h^{3/2}$

A simulation of the contact of two steel particles was performed by applying the factor β of methods LS , HU , BR , TS and HU (Table T2.1) to illustrate the differences of COR of the damping models at arbitrary chosen value of the parameter $v_0 = 0.84$ m/s. Obtained results of the simulation was also compared by the experimentally obtained values of COR. The properties of the particles used in the simulation were the same as for the experimental investigation (Stevens and Hrenya 2005): radius of particles $R = 1.27$ cm, steel grade – AISI 316, density $\rho = 7850$ kg/m³, elastic constant $E = 193$ GPa and Poisson's ratio $\mu = 0.35$. The initial contact velocity $w_0 \in [0.4, 1.4]$ m/s. It should be noted that the values of COR e obtained by the various methods and by experiment are the same at the point $w_0 = v_0 = 0.84$ i.e. $e_{exp}(w_0) = e_{exp}(0.84) = 0.879$.

The performed analysis showed that all considered damping models can be applied in DEM concerning COR by equating the parameter v_0 to the initial contact velocity w_0 . However, as has been already mentioned the problem appear when the particle under consideration contacts with more than one particle at the same time. In this case, the value of the parameter v_0 cannot be taken as equal to the initial contact velocity w_0 since action of the other contacting particles influence the interaction of each other. That is a violation of the assumption of the DEM that interaction of two particles can be considered without taking into account interaction of the other subsidiary particles that interact with the considered particles at the same time. The analysis showed that calculated COR of contacting particles at different w_0 when $w_0 \neq v_0$ according to LS , LH , TS , BR , and HU methods are different in general. The particular case of this statement is illustrated in figure S2.2. It should be noted that not only COR is important. The other parameters, like overlap, its velocity and acceleration, can also have major influence on behaviour of the particle system. The analysis of the single and multicontact simulations shows that influence of a damping model on behaviour of the contacting particles is extremely high at low values of COR.

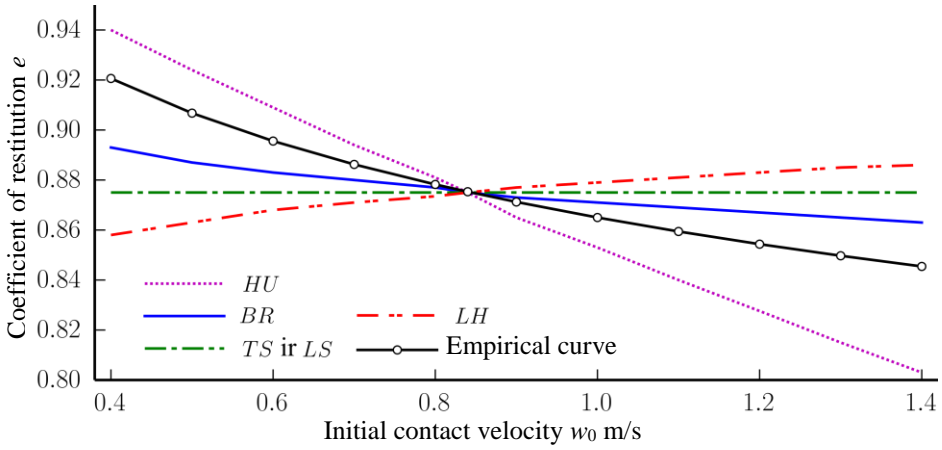


Fig. S2.2. Dependences of the restitution coefficient on the initial contact velocity w_0 : for curves *LS*, *HU*, *BR*, *TS* and *LH* at $v_0 = 0,84$ m/s, and for the Empirical curve
 —○— when $v_0 = w_0 \in [0,4, 1,4]$ m/s

In order to estimate of the influence of the *LH*, *TS*, *BR* and *HU* damping models on the behaviour of multiple contacts the modelling of the waves in the particles chain was applied when all contacts between particles were normal. Two types of the chains were modelled: the chain of type I consists of 7 identical particles (Fig. S2.3. a)), and the chain of type II comprises 7 big and 43 smaller particles, see (Fig. S2.3. b)). The wave was created by striking one particle to the particles chain, (Fig. S2.3.), with initial velocity w_0 .

In order to estimate damping model influence for case of multiple contact, the particles chain is most appropriate model for illustration, when all contacts are in normal direction. For this purpose the wave propagation in the particles chain was investigated when different damping models (*LH*, *TS*, *BR* and *HU*) were used. The wave was created by striking one particle to particles chain (Fig. S2.3.) with initial velocity w_0 .

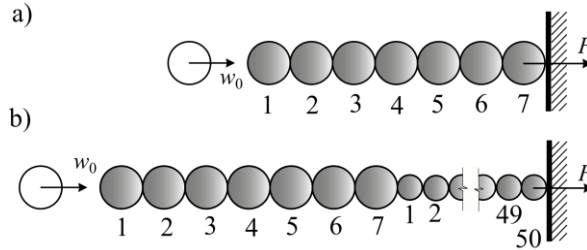


Fig. S2.3. Chains of the particles: a) calculation case I, type of chain of particles 1; b) calculation case II, type of chain of particles 2

The following properties of the particles of the chains were adopted: particles radius $R = 1.3$ cm for the big particles and $R = 0.65$ cm for the small particles, steel grade AISI 52100, density $\rho = 7780$ kg/m³, modulus of elasticity $E = 203$ GPa, Poisson's ratio $\mu = 0.3$, COR $e = 0.965$ and initial contact velocity $v_0 = w_0 = 0.34$ m/s. Contact forces were measured at the support. The comparison of the experimental and simulation results showed the differences in contact forces (Fig. S2.4.) *LH* damping model gave the lowest mismatch and *HU* gave the biggest mismatch between experimental and calculated results for the case I. The opposite situation appeared in case II, the lowest mismatch between the results was obtained using *HU* model. These results confirms that relation of COR with initial contact velocity w_0 is an important factor for accurate of the simulation.

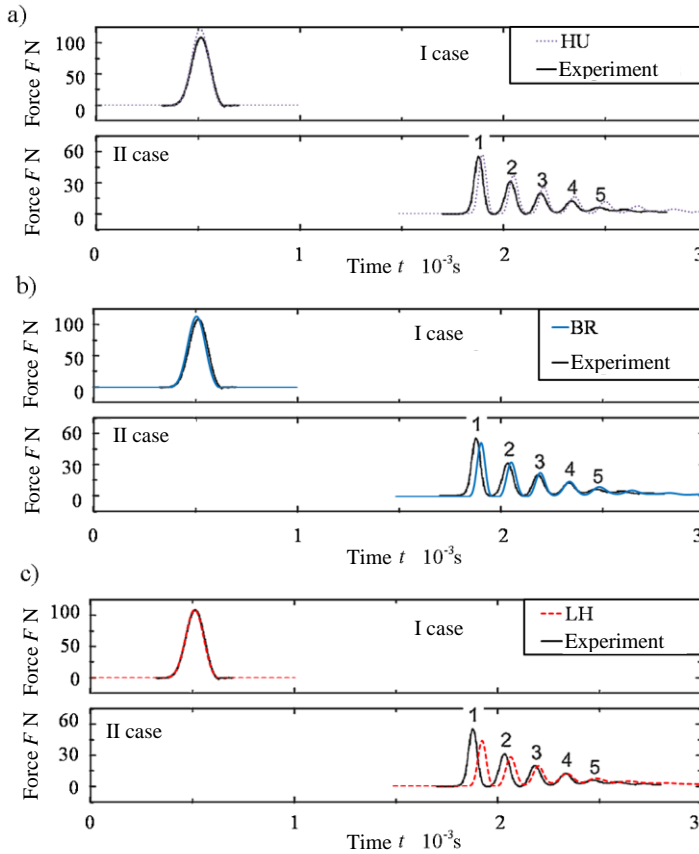


Fig. S2.4. Oscillations of the calculated, F_{HU} , F_{BR} , F_{LH} , and experimental contact forces of the cases I and II at the support (Figs. S4 a) and b))

The main reason of the differences between calculated and experimental results in particle chains is that the initial contact velocity w_0 does not equal to the parameter v_0 , or $w_0 \neq v_0$ during the multiple contacts. The major differences were obtained in the zone of the velocity wave. The calculated and experimental velocities of the particles after the contact are approximately similar and the differences do not depend on the damping models or COR. This leads to the conclusion that the simulation case with many particles contact is not sensitive to the type of the damping model, because the relative difference of the energy of the total particle chain calculated by different methods is very small.

3. Nondimensional viscoelastic damping constants approximation

In the chapter the new viscoelastic damping methodology is proposed to simulate the viscoelastic damping of the contacting particles when COR depends on the initial contact velocity w_0 . The point of the proposed method is that the parameter v_0 is taken as a formal constant that does not depend on the initial contact velocity and is constant during the simulation of a particle system. The power factor β is determined in such a way that calculated COR meets required COR within certain interval of the initial contact velocity $[w_{0,min}, w_{0,max}]$. The comparison of the experimental results with the results calculated by the proposed methodology showed their good agreement. Thus, the proposed methodology allows avoiding the disadvantages of the using of the initial contact velocity as a necessary calculation parameter in simulation of the multiparticle systems.

Using the nondimensional equation of the motion an expression for the nondimensional damping coefficient c depending on β , COR and the initial contact velocity w_0 can be obtained having c at the certain values of COR and initial contact velocity $w_{0,c}$ without integration of the equation of the motion:

Nondimensional damping coefficient expression can be used to find relation between initial contact velocity w_0 and coefficient of restitution e without integration of equation of motion. RK $e(w_0)$ can be found numerically solving equation:

$$c^*(e(w_0), \beta) = c^*(e(v_0), \beta) \left(\frac{w_{0,c}}{w_0} \right)^{(1-4\beta)/5}, \quad (S3.1)$$

where nondimensional damping coefficient $c^*(e, \beta)$:

$$\begin{aligned} c^*(e, \beta) &= \\ &= \frac{2^{-1} (5/4)^{-\frac{2}{5}(1+\beta)} (1 - (0,48e + 0,529)^{5/2})}{\left(\frac{1,275 \ln(e) - 0,82}{1,53e + 3 + \beta} \right) (0,48e + 0,529)^{1,53e + 3 + \beta} + \frac{(0,48e + 0,529)^{\beta+1}}{\beta+1}}. \end{aligned} \quad (S3.2)$$

The dependences of nondimensional damping coefficients c_i, c_i^* $i \in \{HU, BR, TS$ and $LH\}$ on COR are showed in Fig. S3.1. Here c_i is calculated by integration the equation of motion while c_i^* by equation S3.2.

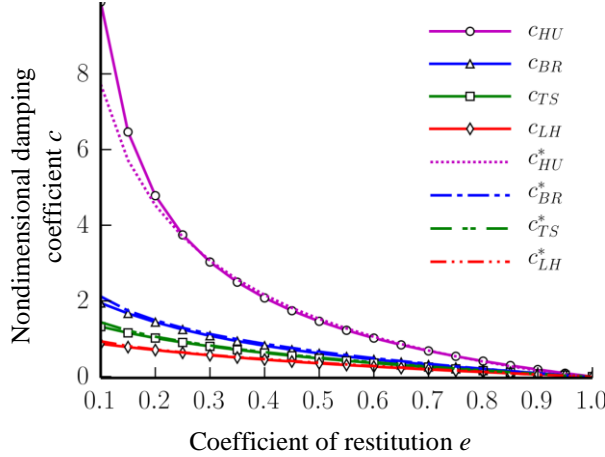


Fig. S3.1. Dependencies of the nondimensional damping coefficient c on the coefficient of restitution e of the different models

As we can see in figure S3.1., the values of the nondimensional constants c_i^* and c_i calculated by proposed equation S3.2. and by integration of the equation of motion are close enough for various damping models (HU, BR, TS and LH) as $COR\ e \in [0.1, 1.0]$. Therefore, the proposed equation S3.2 can be used for calculation of the nondimensional damping coefficient c without integration of the equation of motion.

To illustrate the possibility of the calculation of the COR at the different values of the initial contact velocity w_0 according to the proposed methodology, i.e. by taking constant value of the parameter v_0 , the experimental results (Goldsmith 1960; Stevens and Hrenya 2005) of the collision of two steel and marble particles were used. The value of the coefficient β for the proposed methodology was chosen in such a way that the calculated and experimental COR would be close as much as possible. The simulation and experimental results are depicted in figures S3.2. and S3.3.

From figures. S3.2. and S3.3. we can see a good agreement between calculated values of COR by proposed methodology comparing to the already existing methodologies at constant value of the parameter v_0 when $w_0 \in [0.4, 1.4]$ m/s. The intersection point of the curves is also known as the fitting point. The best results were obtained with β coefficient values of $\beta = 0.4$ and $\beta = 1.0$ for marble and steel particles respectively.

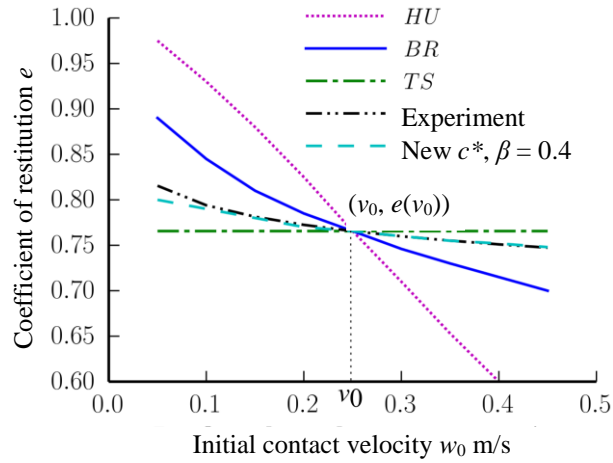


Fig. S3.2. Comparison of calculated coefficients of restitutions of a marble particle with experimental results

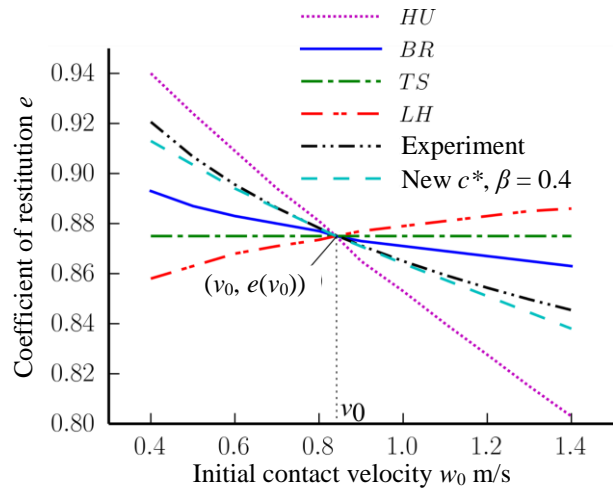


Fig. S3.3. Comparison of calculated coefficients of restitutions of a steel sphere with experimental results

General conclusions

1. Performed analysis of the literature showed that viscoelastic damping models used in the discrete element method are semiempirical character, damping constants do not have clear physical meaning and their influence on the final results of the calculation are not clear.
2. The generalized viscoelastic damping model of the normal contact of the particles was developed by applying the nondimensional analysis. It is shown that well-known viscoelastic damping models developed by Hu, Brilliantov, Tsuji, Lee and Hermann are characterized by the nondimensional damping constant and by the exponent overlap.
3. The developed generalised damping model was applied to reveal the basic features of the known models. Based on the numerical results it was found that at the same value of the coefficient of restitution the bigger is the exponent of the overlap the bigger is the maximum of the contact force and the longer is the duration of the contact. Occurring differences in contact parameters depend on the coefficient of restitution. The significant influence appears when $COR < 0.8$.
4. The influence of the damping models was examined by the modelling of the chains of particles of different length: from 10 up to 200 particles. The following peaks of relative differences in residual energy were determined: when the coefficient of restitution of the particles was 0.8 and the number of particles was 60 then the largest relative difference equal to 0.6; when the coefficient of restitution of the particles was 0.5 and the number of particles was 20 then the largest relative difference equal to 0.5. The performed calculations showed that the relative difference in the residual energy of the particle chains depends on their length – the relative difference of the residual energy increases with increasing number of the particles of the chain, however, up to the certain number of the particles. Further increasing number of the particles leads to the decreasing of the relative difference of the residual energy.
5. The comparison of simulation and experimental results of the propagation of the waves in multiparticle system showed that the contribution of the damping models in time is much more complicated. It was found the best agreement between numerical and experimental results at different time instants was achieved, however, by applying different damping models. The above differences may be explained by the relation of the initial contact velocity and COR .
6. The new methodology of the calculation of the parameters of the generalised damping model was elaborated to evaluate the relationship of the coefficient of restitution to the initial contact velocity within the certain interval. The elaborated methodology also allows taking into account

available experimental data. The comparison of numerical and experience results confirms the efficiency of the developed methodology.

7. Developed generalised damping model and the methodology of their application are not restricted by known models, but the model allows to create new damping models and to improve accuracy of the numerical simulation comparing to the empirical data.

Priedai¹

A priedas. Bendraautorių sutikimai teikti publikacijose skelbtą mokslinę medžiagą daktaro disertacijoje

B priedas. Autoriaus mokslinių publikacijų disertacijos tema kopijos

¹Priedai pateikti atskiroje elektroninėje laikmenoje

Evaldas ZDANCEVIČIUS

DALELIŲ KONTAKTO KLAMPIATAMPRAUS
SLOPINIMO MODELIŲ TYRIMAS

Daktaro disertacija

Technologijos mokslai,
Mechanikos inžinerija (09T)

INVESTIGATION OF VISCOELASTIC DAMPING
MODELS OF PARTICLES CONTACT

Doctoral Dissertation

Technological Sciences,
Mechanical Engineering (09T)

2016 12 12. 10.5 sp. I. Tiražas 20 egz.
Vilniaus Gedimino technikos universiteto
leidykla „Technika“,
Saulėtekio al. 11, 10223 Vilnius,
<http://leidykla.vgtu.lt>
Spausdino BJ UAB „Baltijos kopija“
Kareivių g. 13B, 09109 Vilnius